

Singularidades em Teorias $f(R)$ da Gravitação

Vinícius Miranda Bragança

Orientador: Ioav Waga

Singularidades em Teorias $f(R)$ da Gravitação

Vinícius Miranda Bragança

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Orientador: Ioav Waga

Rio de Janeiro
Janeiro de 2010

I 79 Bragança, Vinícius Miranda

Teorias $f(R)$ da Gravitação / Vinícius Miranda Bragança - Rio de Janeiro: UFRJ / IF, 2010.

xiii, 57f.: il. ; 29,7cm.

Orientador: Ioav Waga

Dissertação (mestrado) - UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-graduação em Física , 2010.

Referências Bibliográficas: f. 54-57.

1. Cosmologia. 2. Energia Escura. 3. Gravitação Modificada.
4. Teorias $f(R)$ I. Waga, Ioav. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de pós-graduação em Física.
- III. Teorias $f(R)$ da Gravitação.

Resumo

Singularidades em Teorias $f(R)$ da Gravitação

Vinícius Miranda Bragança

Orientador: Ioav Waga

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

A busca de uma explicação física satisfatória, para a origem física da aceleração cósmica, é considerada um dos mais importantes desafios atuais da ciência. No contexto da teoria da Relatividade Geral, a existência de uma nova componente exótica com pressão negativa, denominada energia escura, é absolutamente necessária, para que o modelo padrão da cosmologia possa explicar toda uma gama de observações astronômicas. O mais simples modelo de energia escura é intitulado Λ CDM e consiste na introdução de uma constante cosmológica. Do ponto de vista puramente observacional, esse modelo descreve, de forma satisfatória, os dados observacionais. Contudo, existem questões de natureza teórica que motivam físicos a desenvolver outras possibilidades. Na busca por alternativas dinâmicas, duas possibilidades muito distintas são possíveis. Nas equações de Einstein, tanto o lado direito, a partir da introdução de uma nova componente, quanto o lado esquerdo, mediante a mudança da maneira pela qual a matéria influencia a métrica do espaço-tempo, são passíveis de alterações. Um exemplo da primeira abordagem são os modelos de quintessência, em que um campo escalar dirige a aceleração cósmica. Em contrapartida, é possível citar, como exemplo da segunda possibilidade, os modelos de gravitação modificada nomeados "Teorias $f(R)$ da Gravitação". Essas teorias modificam a Relatividade Geral, fornecendo uma dinâmica ao escalar de Ricci. Apesar de consistirem na mais simples modificação da lagrangiana de Einstein-Hilbert, algumas dificuldades foram discutidas nos últimos anos. Por exemplo, a existência, em modelos cujas previsões estão em concordância com os testes clássicos da gravitação, de singularidades na evolução cosmológica, e a impossibilidade de obtenção, nestes mesmos modelos, de soluções estáticas para estrelas dotadas de equações de estado relativísticas, são questões que serão abordadas neste trabalho. Neste contexto, a dissertação propõe um caminho capaz de gerar modelos não singulares e compatíveis com a presença de objetos compactos. Entretanto, conforme será apresentado, conflitos com testes da gravitação, realizados no Sistema Solar, demonstram a dificuldade de se obter alternativas viáveis à Λ CDM.

Palavras-chave: Cosmologia. Energia escura. Gravitação Modificada. Teorias $f(R)$ da Gravitação

Rio de Janeiro

Janeiro de 2010

Abstract

Singularities in $f(R)$ Theories of Gravity

Vinícius Miranda Bragança

Orientador: Ioav Waga

Abstract da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

The search for a satisfactory physical explanation for the physical origin of cosmic acceleration, is considered one of the major challenges of science. In the context of General Relativity theory, the existence of a new exotic component with negative pressure called dark energy is absolutely necessary to allow the standard model of cosmology to explain a whole range of astronomical observations. The simplest model of dark energy is called Λ CDM and it consists in introducing a cosmological constant. From the observational standpoint, this model describes satisfactorily the observational data. However, there are theoretical issues that motivate physicists to develop other possibilities. In the search for alternatives, two are two different approaches. In Einstein's equations, either the right side, by introduction a new component, or the left side, by changing the way the field influences the space-time metric, are subject to change. An example of the first possibility is the quintessence model, where a scalar field drives the cosmic acceleration. Conversely, it is possible to cite, as an example of the second possibility, the models of modified gravity named " $f(R)$ Theories of Gravity.". These theories modify General relativity, providing dynamics to the Ricci scalar. Although this is the simplest modification of Einstein-Hilbert Lagrangian, there are some difficulties which is being discussed in recent years. For example, the existence of singularities, during the cosmological evolution, in models whose predictions are in agreement with the classical tests of gravitation and the impossibility of obtaining, in these same models, static solutions for relativistic stars, are issues that will be discussed in this work. In this context, this dissertation proposes a way to create models which do not generate singularities and are consistent with the presence of compact objects. However, as will be presented, conflicts with tests of gravitation, held in the Solar System, demonstrates the difficulty of obtain viable alternatives to Λ CDM.

Key-words: Cosmology. Dark energy. Modify Gravity. $f(R)$ Theories of Gravity

Rio de Janeiro

Janeiro de 2010

Notações e Convenções

1. Índices gregos variam de 0 a 3.
2. Índices latinos variam de 1 a 3.
3. Assinatura da métrica: $(-, +, +, +)$.
4. Símbolo de Christoffel:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\nu\delta}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\delta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\delta}} \right) .$$

5. Derivada covariante:

$$A_{\beta;\alpha} = \nabla_{\alpha}A_{\beta} = \frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}A_{\lambda} .$$

6. Tensor de Riemann:

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} .$$

7. Transformada de Fourier:

$$\text{TF}\{A(\vec{x}, t)\} = \int d^3x A(\vec{x}, t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \tilde{A}(\vec{k}, t) .$$

8. Transformada de Fourier inversa:

$$A(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \tilde{A}(\vec{k}, t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} .$$

9. No sistema de unidades utilizado, a velocidade da luz é sempre igual a $c = 1$.
10. Definição de massa de um objeto com densidade de massa igual a ρ e pressão desprezível:

$$M = \int d^3x \rho(\vec{x}, t) .$$

11. M_{\odot} : massa solar.
12. R : escalar de Ricci
13. R_{dS} : valor do escalar de Ricci na solução de vácuo.
14. \mathcal{R} : raio de objetos esfericamente simétricos.
15. f_R :

$$f_R = \frac{df(R)}{dR} .$$

16. f_{RR} :

$$f_{RR} = \frac{d^2 f(R)}{dR^2} .$$

17. f_0 :

$$f_0 = f(R_{\text{dS}}) .$$

18. f_{R0} :

$$f_R = \left. \frac{df(R)}{dR} \right|_{R=R_{\text{dS}}} .$$

19. f_{RR0} :

$$f_{RR0} = \left. \frac{d^2 f(R)}{dR^2} \right|_{R=R_{\text{dS}}} .$$

20. $h(R)$:

$$h(R) = f(R) - R .$$

21. h_R :

$$h_R = \frac{dh(R)}{dR} .$$

22. h_{RR} :

$$h_{RR} = \frac{d^2h(R)}{dR^2} .$$

23. h_{R0} :

$$h_{R0} = \left. \frac{d^2h(R)}{dR^2} \right|_{R=R_{\text{dS}}} .$$

24. h_{RR0} :

$$h_{RR0} = \left. \frac{d^2h(R)}{dR^2} \right|_{R=R_{\text{dS}}} .$$

25. g : determinante da métrica.

26. G : constante universal da gravitação.

27. T : traço do tensor energia momento.

28. κ :

$$\kappa = \sqrt{\frac{8\pi G}{c^4}}$$

29. Uma grandeza x , definida na moldura de Jordan, é denotada \tilde{x} na moldura de Einstein.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, aos meus pais, Vania Miranda e Edilson Bragança, pois sem o suporte financeiro e emocional deles, a continuação dos meus estudos em física não seria possível. Reservo, em segundo lugar, um agradecimento especial a minha mãe, Vania Miranda, pela enorme perseverança demonstrada ao longo das últimas duas décadas com o único objetivo de prover, a mim e a minha irmã, Isabella Miranda, um futuro melhor e mais seguro.

Em terceiro lugar, gostaria de homenagear o professor e orientador Ioav Waga, por ter, ao longo dos últimos anos, respeitado e apoiado meus projetos e idéias. Gostaria de agradecê-lo pela preocupação constante com a minha formação acadêmica e pessoal. Nossas inúmeras conversas sobre diversos temas serviram muitas vezes como precioso guia para minhas decisões. Tenho certeza de que o professor Ioav Waga teve um papel fundamental para a obtenção da minha bolsa de doutorado CAPES/Fulbright e a criação de valiosas oportunidades para apresentar minhas reflexões a pesquisadores nacionais e internacionais. Por último, gostaria de agradecê-lo pelas incontáveis caronas que tornaram minha saída do Fundão mais rápida e agradável.

Em quarto lugar, gostaria de agradecer ao professor Maurício Calvão pela dedicação nos cursos de Introdução à Cosmologia e à Relatividade Geral. Seu enorme embasamento teórico foi fundamental para minha formação acadêmica, principalmente durante nossas longas e interessantes conversas sobre física. Também gostaria de prestar minhas homenagens a este querido professor e a sua simpática e querida esposa, Sandra, por todo apoio e incentivo para que eu pudesse me apresentar e discutir diversos temas com os professores Ravi Sheth e

Wayne Hu, durante, respectivamente, a Escola Brasileira de Cosmologia e Gravitação e o II *Challenges of New Physics*. Também gostaria de, no fim desse singelo parágrafo, agradecer-lo pelas diversas caronas até Copacabana e pela infinita paciência para, ao final de um dia cansativo de trabalho, discutir vários temas, envolvendo desde eletromagnetismo até políticas presidenciais, passando por privatizações do setor público, convênio IF-Polytechnique, dentre outras polêmicas.

Em quinto lugar, gostaria de agradecer ao professor Sérgio Jorás, por todo apoio e esforço durante a elaboração do nosso artigo e pela paciência de escutar minhas idéias e sugestões. Nossas discussões foram muito importantes para o entendimento dos problemas envolvendo singularidades em $f(R)$. Além disso, seu total apoio às minhas convicções foram fundamentais para que eu pudesse expor meus pensamentos com a devida convicção e confiança. Também o agradeço por algumas caronas que tornaram minha saída do Fundão mais rápida e agradável. Além disso, sua grande prestatividade para desenvolver os incompletos e altamente imperfeitos códigos em Maple, que eu sempre enviava desesperado, foi indispensável no desenvolvimento do projeto proposto nesta dissertação. Por fim, agradeço a esse professor por sempre estar disponível, em sua sala, para bater um papo e por ter apoiado a minha difícil escolha de tentar cursar um doutorado nos Estados Unidos.

Em sexto lugar, gostaria de agradecer meus amigos da faculdade Marcos Brum, Ramón Gostri, Bruno Lazarotto, Reinaldo de Melo, Felipe Amaral, Gustavo Sophia, Thiago Hartz, além dos professores Ribamar Reis e Jaime Fernando Villas da Rocha, em face do grande apoio e paciência demonstrados às minhas idéias malucas e às minhas crises sentimentais. Sem a companhia de vocês, a minha passagem pelo Fundão teria sido muito mais chata e tediosa, sem contar que eu estaria, literalmente, frito! Eu também nunca teria comprovado a superioridade do Windows XP sem os engraçados e estressantes bugs ocorridos no Ubuntu do computador do Marcos!

Em sétimo lugar, gostaria de agradecer aos grandes amigos de infância Marcelo Leite Sacramento, Pedro Henrique Cruz de Carvalho e Leandro Richelette. Apesar de vocês não pertecerem diretamente ao mesmo meio acadêmico, tenho certeza de que foram fundamentais

para a minha formação pessoal. Se hoje eu sou um estudante alegre, empolgado e equilibrado emocionalmente, qualidades importantes para suportar as pressões que a faculdade impõe, tenham certeza que vocês contribuíram decisivamente para isso, pois me proporcionaram uma infância e adolescência agradável, interessante e divertida.

Em oitavo lugar, gostaria de agradecer a Sheila Southgate de Oliveira, pois tenho certeza que esta maravilhosa companheira marcou, de forma fundamental, a escrita desta dissertação. Enquanto muitos estudantes de pós graduação descrevem os meses que antecedem a defesa como infernais e estressantes, eu posso dizer que eles foram agradáveis, felizes, interessantes e apaixonantes, graças a companhia dessa linda, romântica e simpática mulher! Nos momentos estressantes, ela foi carinhosa, e nos momentos de exaustão, ela foi compreensiva. Por último, ela me proporcionou felizes passeios nos fins de semana, que renovaram minha mente e meu espírito. Sempre tive a certeza de que a minha escrita é influenciada, de forma determinante, pelo meu estado de espírito e, portanto, tenho a convicção de que eu sempre irei lembrar os nossos felizes momentos ao foliar essas páginas no futuro.

Em nono lugar, gostaria de agradecer ao professor Marcus Venicius Cougo Pinto pela sua prestatividade e paciência para sugerir melhorias no estilo em minha dissertação. Além disso, a renomada didática desse professor, exibida no curso de mecânica clássica II, foi muito importante para sanar minhas deficiências.

Por último, mas igualmente importante, gostaria de agradecer aos professores que participaram da minha formação acadêmica, lecionando importantes e interessantes cursos. Em particular, gostaria de mencionar o professor Felipe Acker, pois o seu talento, para ensinar matemática de um jeito irreverente, e o seu estímulo, para que eu cursasse matérias do mestrado em matemática aplicada ainda no ciclo básico, marcaram de forma muito positiva meus primeiros anos da faculdade. Também gostaria de mencionar o professor Luiz Davidovich, cujos *insights* em mecânica quântica mudaram, de forma radical, minha maneira de pensar a respeito do estranho mundo dos átomos e fótons. Também o agradeço pela enorme paciência para responder as minhas inúmeras perguntas, pela permissão concedida para que eu pudesse cursar seu curso de quântica do mestrado antes de me formar na graduação e

pelo seu irrestrito apoio à obtenção da minha bolsa Fulbright de doutorado.

Além dos nomes citados, gostaria de citar a professora Mônica Baiana, pelo esforço para ensinar, de forma simples, a difícil disciplina de Mecânica Estatística e pela permissão, concedida a mim, para cursar a sua matéria de mestrado ainda no sétimo período da graduação, o professor Cláudio Lenz, pelo irrestrito apoio à obtenção da minha bolsa Fulbright de doutorado e, por último, a professora Ana Maria, pelo total suporte, na condição de orientadora acadêmica, às minhas escolhas, enquanto fui aluno de graduação. Tenho certeza de que sem preciosos conselhos da professora Ana Maria, eu não teria tido condições de seguir minhas convicções e, provavelmente, minha empolgação com a física teria esmaecido no burocrático sistema de escolha de disciplinas existente na graduação, que impede a maioria dos alunos de desenvolverem seus talentos em divertidas classes na matemática, na história, na geografia e, quem sabe, até nas artes!

Lista de Figuras

1.1	Gráficos da função $h(R)$ para alguns casos estudados na literatura.	7
2.1	Comportamento do tipo <i>phantom</i> da equação de estado w_{EE}	22
2.2	Perfil da equação de estado efetiva avaliado no ponto P_6	29
2.3	Perfil ampliado da equação de estado efetiva avaliada no ponto P_6	29
2.4	Variação dos autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 como função de m_6 e M_6	30
2.5	Variação do autovalor λ_4 , em P_6 , como função de m_6 e M_6	32
2.6	Ponto fixo P_5 para o modelo $f(R) = R - \alpha(R_0^2/R)$	34
2.7	Ponto fixo P_1 para o modelo $f(R) = f(R) = R - \alpha(R_0^2/R)$	35
2.8	Ponto fixo P_6 para o modelo $f(R) = R - \alpha(R_0^2/R)$	36
2.9	Cosmologia prevista pelo modelo $f(R) = R - \alpha(R_0^2/R)$	37
2.10	Gráfico da função $m(R)$ previsto pelo modelo (2.56), para $\alpha = 1.2$	38
2.11	Gráfico da função $m(R)$ previsto pelo modelo (2.56), para $\alpha = 1.2$	39
2.12	Raízes da equação $m(r) = -r - 1$ previstas por (2.56) para $\alpha = 1.2$ e $\alpha = 0.9$	40
2.14	cosmologia prevista pelo modelo (2.56), considerando $\alpha = 2$	40
2.13	Gráfico da função $M(r)$ em P_5 previsto por (2.56)	41
2.15	cosmologia prevista pelo modelo (2.56), considerando $\alpha = 0.9$	41
3.1	Pólos da equação (3.43), no caso particular $m^2 > 0$	54
3.2	Pólos da função de Green retardada e avançada	55
3.3	Perfil qualitativo de um potencial $V_{\text{eff}}(\phi)$ compatível com camaleão	62
3.4	Perfil qualitativo do potencial $-V_{\text{eff}}$ dentro e fora da estrela	64

3.5	Dinâmica de uma partícula sob a ação do potencial $-V_{\text{eff}}(\phi)$	65
6.1	Perfil do potencial $V(\phi)/R_0$ para o modelo (6.3)	96
6.2	Perfil do potencial $V(\phi)/R_0$ previsto pelo modelo (6.3)	96
6.3	Perfil do potencial $V(\phi)/R_0$ predito pelo modelo (6.2)	97
6.4	Perfil do potencial $V(\phi)/R_0$ para o modelo (6.4)	97
6.5	Diferença $\Delta\phi$ para o modelo (6.3)	100
6.6	Potencial $V(\phi)$ para o modelo (6.3) acrescido da correção $\beta R_0(R/R_0)^2$	101
6.7	Potencial $V(\chi)$ para diferentes modelos	103
7.1	Potencial $U(\chi)$ esperado pelo modelo (6.3)	109
7.2	Ampliação do potencial $U(\chi)$ para o modelo (6.3)	110
7.3	Comportamento da solução da partícula clássica em estrelas relativísticas	113
7.4	Perfil da pressão, no interior estelar, previsto pelo modelo (6.3).	121
7.5	Perfil dos campos $N(r)$ e $B(r)$ obtidos numericamente para $n = 1$ e $\alpha = 2.088$	122
7.6	Perfil do campo χ previsto numericamente para $n = 1$ e $\alpha = 2.088$	123
7.7	Perfil do campo χ , previsto pelo modelo(6.3), para estrelas relativísticas.	124
7.8	Perfil do campo χ para a solução numérica das equações de campo	126
7.9	Perfil dos campos $N(r)$ e $B(r)$ previsto pelo modelo (6.3) acrescido de R^2/μ	127
7.10	Perfil do escalar de Ricci previsto pelo modelo (6.3) acrescido de R^2/μ	128
7.11	Parâmetro ϵ como função da densidade de energia	129
7.12	Solução numérica das equações de campo prevista pelo modelo logaritmo.	130
7.13	Estrela Relativística prevista pelo modelo (6.3).	131
7.14	Derivada da campo χ prevista pelo modelo (6.3).	132
7.15	Razão $M_{\text{eff}}/M_{\text{linear}}$	133
7.16	Potencial newtoniano superficial como função da equação de estado	134
8.1	Mínimo do potencial para diferentes valores de β do modelo (6.17).	142
9.1	Espectro de potência previsto pelo modelo (6.18) para $\alpha = 2$	144

9.2	Espectro de potência previsto por (9.2), considerando $h_{R0} = 1 \times 10^{-4}$	147
9.3	Perfil de diferentes campos previsto por (9.2), supondo $h_{R0} = 1 \times 10^{-4}$	148
9.4	Espectro de potência previsto por (9.2), supondo $h_{R0} = 1 \times 10^{-6}$	149
9.5	Perfil de diferentes campos previsto por (9.2), supondo $h_{R0} = 1 \times 10^{-6}$	150
9.6	Número de halos, em $z=0$, previsto pelo modelo (9.2).	151
9.7	Perfil NFW de densidade previsto pelo modelo (6.2) para $h_{R0} = 1 \times 10^{-4}$	155

Conteúdo

Resumo	iv
Abstract	v
Notações e Convenções	vi
Agradecimentos	ix
Lista de Figuras	xiii
1 Introdução às Teorias $f(R)$ da Gravitação	1
1.1 Equações de Campo	1
1.2 Equivalência com teorias do tipo escalar-tensorial	8
2 Introdução à Evolução Cosmológica	14
2.1 Introdução	14
2.2 Pontos Críticos	24
2.3 Exemplos	33
3 Introdução à Estrelas Estáticas	42
3.1 Introdução	42
3.2 Solução das Equações de Campo no Limite Perturbativo	53
3.3 Efeito Camaleão	60

4	Introdução às Perturbações na Cosmologia	70
4.1	Introdução	70
4.2	Equação de Evolução para a Densidade de Energia da Matéria	82
5	Teoremas de Estabilidade	87
6	Singularidades na evolução cosmológica	93
7	Existência de Estrelas Relativísticas	106
7.1	Introdução	106
7.2	Solução Analítica	115
7.3	Soluções Numéricas	120
7.4	Soluções	125
8	Efeito Camaleão aplicado a diferentes modelos	136
9	Perturbações na Cosmologia aplicadas à diferentes modelos	143
10	Conclusões	156

Capítulo 1

Introdução às Teorias $f(R)$ da Gravitação

1.1 Equações de Campo

As teorias $f(R)$ foram propostas para alterar a maneira pela qual o tensor de curvatura depende do tensor energia-momento. No contexto da formulação métrica, expressão cujo significado é elucidado posteriormente, essa modificação tem como objetivo primal fornecer uma dinâmica ao escalar de Ricci. Isto significa que, nesses modelos, o traço das novas equações de campo relaciona o escalar de Ricci e o tensor energia momento por meio de uma equação diferencial de segunda ordem, ao invés de uma equação algébrica, como ocorre na teoria da Relatividade Geral (Sotiriou & Faraoni 2008).

O escalar de Ricci é, por definição, uma função das derivadas primeira e segunda das componentes do tensor métrico, com relação às diferentes coordenadas do espaço-tempo (Carroll 2004). Assim sendo, as equações de campo desse novo conjunto de modelos vinculam a métrica e o tensor energia-momento por intermédio de equações diferenciais de quarta ordem. Manipular essas não linearidades, que é um comportamento característico do campo gravitacional, é o principal desafio teórico existente no contexto da formulação métrica.

A partir da ação

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_{\text{mat}} , \quad (1.1)$$

denominada Einstein-Hilbert, cuja minimização resulta nas equações de Einstein, e da pos-

terior substituição da lagrangiana, formada pelo escalar de Ricci, por funções, *a priori*, não lineares desse mesmo escalar, a ação

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_{\text{mat}} \quad (1.2)$$

é postulada. A forma funcional dessa lagrangiana originou a nomenclatura desses modelos (Sotiriou & Faraoni 2008).

Nas equações (1.1) e (1.2), S_{mat} corresponde, por definição, aos termos da ação dependentes não apenas dos elementos da métrica, mas também da presença de matéria e de campos originários de interações não gravitacionais, a exemplo do campo eletromagnético. A minimização da ação (1.2) requer cuidados adicionais, no tocante ao procedimento consagrado na ação de Einstein-Hilbert. Na teoria da Relatividade Geral, a minimização, com respeito somente às componentes da métrica, postulando os símbolos de Christoffel, é equivalente à minimização relativa aos elementos da conexão e da métrica, tratando-os independentemente (Wald 1984). No entanto, no contexto das teorias $f(R)$, a presunção de independência desses campos resulta na equação (Sotiriou & Faraoni 2008)

$$\nabla_\beta (\sqrt{-g} f_R g^{\mu\nu}) = 0. \quad (1.3)$$

Nos casos em que a derivada $d^2 f(R)/dR^2$ é uma função não nula, a igualdade (1.3) demonstra que a derivada covariante da métrica não é, necessariamente, igual a zero e, por conseguinte, a conexão não é igual aos símbolos de Christoffel. Logo, os dois métodos descritos anteriormente não resultam em equações de campo equivalentes. A minimização, que pressupõe a independência entre a conexão e a métrica, é intitulada formulação de Palatini. Em contrapartida, é designado formulação métrica o processo que postula os símbolos de Christoffel.

Nesta dissertação, apenas as propriedades relacionadas à formulação métrica das teorias $f(R)$ são analisadas. A principal justificativa a essa escolha consiste no fato do traço das equações de campo, na formulação de Palatini, relacionar o escalar de Ricci e o traço do tensor energia-momento por meio de uma equação algébrica, conforme exibido na fórmula (1.5) (Sotiriou & Faraoni 2008). Para demonstrar este resultado, é necessário utilizar as

equações de campo,

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{f(R)}{2} g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} , \quad (1.4)$$

da formulação de Palatini. A contração dos índices covariante e contravariante resulta na equação

$$f_R R - 2f(R) = \kappa^2 T . \quad (1.5)$$

A expressão acima é mais geral que a relação $R = -\kappa^2 T$, demonstrada a partir das equações de Einstein. Em princípio, esse fato resulta numa dinâmica, na cosmologia, mais rica e interessante. Entretanto, a ausência de uma equação dinâmica é, com frequência, criticada na literatura, por resultar em aparentes paradoxos (Sotiriou & Faraoni 2008). Essa desaprovação culminou num desenvolvimento mais focado na formulação métrica das teorias $f(R)$ (Sotiriou & Faraoni 2008). Portanto, neste trabalho, essa é a formulação adotada.

A partir do princípio da mínima ação, as equações de campo para as teorias $f(R)$ são obtidas. Essa demonstração é apresentada por etapas, em virtude dos inúmeros passos algébricos necessários para a sua conclusão. Inicialmente, a manipulação algébrica

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left[\delta\sqrt{-g} f(R) + \sqrt{-g} \delta f(R) \right] + \delta S_{\text{mat}} \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left[\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\alpha\beta}} f(R) + \sqrt{-g} f_R \left(R_{\alpha\beta} + g^{\mu\nu} \frac{\delta R_{\mu\nu}}{\delta g^{\alpha\beta}} \right) \right] \delta g^{\alpha\beta} + \delta S_{\text{mat}} \end{aligned} \quad (1.6)$$

é imposta à lagrangiana presente na ação (1.2). Nesse ponto, é importante utilizar as relações (Carroll 2004)

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} , \quad (1.7)$$

$$\delta R^\rho_{\mu\lambda\nu} = \nabla_\lambda \delta \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\rho_{\lambda\mu} , \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \left[g_{\lambda\mu} \nabla_\nu \delta g^{\lambda\sigma} + g_{\lambda\nu} \nabla_\mu \delta g^{\lambda\sigma} - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla^\sigma \delta g^{\alpha\beta} \right] \\ &= -\frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} \left[\nabla_\nu \delta g_{\alpha\mu} + \nabla_\mu \delta g_{\alpha\nu} - \nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu} \right] , \end{aligned} \quad (1.9)$$

Mediante a substituição das igualdades (1.7) e (1.8) no desenvolvimento exposto em (1.6), as equações

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta S_{\text{mat}} + \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(-\frac{1}{2}f(R)g_{\alpha\beta} + f_R R_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} + g^{\mu\nu} f_R (\nabla_\rho \delta \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\rho_{\rho\mu}) \right] \\
 &= \delta S_{\text{mat}} + \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(-\frac{1}{2}f(R)g_{\alpha\beta} + f_R R_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} + f_R \nabla_\rho (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\rho_{\nu\mu} - g^{\mu\rho} \delta \Gamma^\nu_{\nu\mu}) \right] \\
 &= \delta S_{\text{mat}} + \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(-\frac{1}{2}f(R)g_{\alpha\beta} + f_R R_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} - (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\rho_{\mu\nu} - g^{\mu\rho} \delta \Gamma^\nu_{\mu\nu}) \nabla_\rho f_R \right],
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

são obtidas.

Na última igualdade expressa em (1.10), uma integração por partes foi aplicada no termo final do integrando, trocando seu sinal. O prosseguimento da minimização da ação (1.2) depende, necessariamente, da expansão, por meio da equação (1.9), das variáveis presentes na última parcela da integral (1.10). Esse destrinçe é elucidado no desenvolvimento

$$\begin{aligned}
 g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\rho_{\nu\mu} - g^{\mu\rho} \delta \Gamma^\nu_{\nu\mu} &= -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\rho\alpha} [\nabla_\nu \delta g_{\alpha\mu} + \nabla_\mu \delta g_{\alpha\nu} - \nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu}] \\
 &\quad - \frac{1}{2} g^{\mu\rho} g^{\nu\alpha} [\nabla_\nu \delta g_{\alpha\mu} + \nabla_\mu \delta g_{\alpha\nu} - \nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu}] \\
 &= -\nabla_\mu \delta g^{\rho\mu} + g^{\alpha\rho} \nabla_\alpha \delta g^\mu_\mu.
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

De posse desse resultado, é possível perseverar na integração por partes, efetuada em (1.10), com o objetivo de isolar, de modo explícito, o parâmetro $\delta g^{\alpha\beta}$ em todas as parcelas do integrando dessa equação, conforme exposto a seguir:

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta S_{\text{mat}} + \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(-\frac{1}{2}f(R)g_{\alpha\beta} + f_R R_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} + \nabla_\rho f_R (\nabla_\mu \delta g^{\rho\mu} - g^{\alpha\rho} \nabla_\alpha \delta g^\mu_\mu) \right] \\
 &= \delta S_{\text{mat}} + \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(-\frac{1}{2}f(R)g_{\alpha\beta} + f_R R_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} + \nabla_\rho f_R (\nabla_\mu \delta g^{\rho\mu} - g^{\alpha\rho} \nabla_\alpha \delta g^\mu_\mu) \right] \\
 &= \delta S_{\text{mat}} + \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(-\frac{1}{2}f(R)g_{\alpha\beta} + f_R R_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} - (\delta g^{\rho\mu} - g^{\mu\rho} \delta g^\theta_\theta) \nabla_\mu \nabla_\rho f_R \right].
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Após um rearranjo dos índices mudos presentes em (1.12), as novas equações de campo são

obtidas, a partir do princípio da mínima ação aplicado à expressão

$$0 = \delta S_{\text{mat}} + \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} f(R) g_{\alpha\beta} + f_R R_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha \nabla_\beta f_R + g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu f_R \right] \delta g^{\alpha\beta} . \quad (1.13)$$

Finalmente, as equações de campo das teorias $f(R)$ são iguais a

$$f_R R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} f(R) g_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha \nabla_\beta (f_R) + \nabla^\mu \nabla_\mu (f_R) g_{\alpha\beta} = \kappa^2 T_{\alpha\beta} . \quad (1.14)$$

Nessa expressão, o tensor energia-momento é definido por intermédio da igualdade

$$T_{\alpha\beta} := -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{mat}}}{\delta g^{\alpha\beta}} . \quad (1.15)$$

Conforme mencionado, esse novo conjunto de equações prevê uma dependência dinâmica do escalar de Ricci no tocante às componentes do tensor energia-momento, o que é verificado, de forma direta, por meio da igualdade

$$f_R R - 2f(R) + 3\nabla^\mu \nabla_\mu (f_R) = \kappa^2 T , \quad (1.16)$$

correspondente ao traço das equações de campo. Em (1.16), a variável T é, por definição, equivalente ao traço do tensor energia-momento, calculado a partir da contração $T := T^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}$.

A expressão tensorial (1.14) corresponde a um sistema de equações diferenciais, não lineares e de quarta ordem nas variáveis da métrica. O controle dessas não linearidades é um desafio ainda em aberto e envolve questões que são abordadas ao longo desta dissertação. Por exemplo, o correto entendimento sobre os limites pelos quais é permitido linearizar esse sistema, é imprescindível para a obtenção de resultados factíveis. Conforme demonstrado posteriormente, os efeitos não lineares são essenciais para a compatibilização entre as previsões das teorias $f(R)$ e os testes clássicos da gravitação, realizados no Sistema Solar.

Um resultado importante, a ser demonstrado a partir da equação (1.16), consiste na conservação do tensor energia-momento. Portanto, as equações de campo das teorias $f(R)$

predizem as mesmas leis de conservação existentes na teoria da Relatividade Geral. A demonstração desse enunciado é relatada na expressão

$$\begin{aligned}
\kappa^2 \nabla_\beta T^{\alpha\beta} &= R^{\alpha\beta} \partial_\beta f_R + f_R \left(\nabla_\beta R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\beta R \right) - \nabla_\beta \nabla^\alpha \partial^\beta f_R + g^{\alpha\beta} \nabla_\beta \nabla^\theta \partial_\theta f_R \\
&= R^{\alpha\beta} \partial_\beta f_R + f_R \nabla_\beta G^{\alpha\beta} - g^{\alpha\mu} \left(\nabla_\mu \nabla_\beta \partial^\beta f_R - R^\beta_{\mu\beta\theta} \partial^\theta f_R \right) + \nabla^\alpha \nabla^\theta \partial_\theta f_R \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Nessas equações, o tensor $G^{\alpha\beta}$ é denominado tensor de Einstein e esse é definido por intermédio da igualdade $G^{\alpha\beta} := R^{\alpha\beta} - (1/2)Rg^{\alpha\beta}$. *A priori*, a generalização da lagrangiana de Einstein-Hilbert abre um enorme número de novas possibilidades. Corroborando essa afirmação, inúmeros exemplos, com dinâmicas distintas, foram analisados em trabalhos publicados na literatura, dentre os quais é possível citar Amendola, Gannouji, Polarski & Tsujikawa (2007), Hu & Sawicki (2007a), Starobinsky (2007), Miranda, Jorás, Waga & Quartin (2009b) e Capozziello, Cardone, Carloni & Troisi (2003).

Os capítulos subsequente têm como objetivo principal a restrição da forma funcional da lagrangiana $f(R)$, a partir da imposição de pré-requisitos básicos, tais como a existência, na cosmologia, de uma fase regular dominada pela matéria não relativística, seguida de um atrator final capaz de induzir uma expansão cósmica acelerada. Esses vínculos reduzem bastante o número de modelos promissores (Amendola, Gannouji, Polarski & Tsujikawa 2007, Amendola, Polarski & Tsujikawa 2007).

A figura 1.1 apresenta exemplos, alguns deles já descartados em razão da incompatibilidade com as observações, ou da presença de singularidades. Em todos esses casos, a constante R_0 é da ordem de grandeza do valor atual do escalar de Ricci, predito pela teoria da Relatividade Geral, que é, aproximadamente, igual a $R_0 \simeq \kappa^2 \rho_0 / 3 = (8.315 \times 10^3 \text{ Mpc})^{-2} (\Omega_m h^2) (1.3 \times 10^{-1})^{-1}$, em que h é um parâmetro adimensional da ordem de 0.7 e Ω_m é a razão entre a densidade de matéria não relativística e a densidade crítica do universo, da ordem de $1 \times 10^{-29} \text{ g/cm}^3$ (Hu & Sawicki 2007a). Uma dissonância muito acentuada, com relação a esse número, resulta em modelos cosmológicos cuja fase acelerada é iniciada, na escala de desvio para o vermelho, ou de modo prematuro, ou tardiamente, com relação às estimativas observacionais, que apontam o início da aceleração do universo em $z \simeq 0.7$.

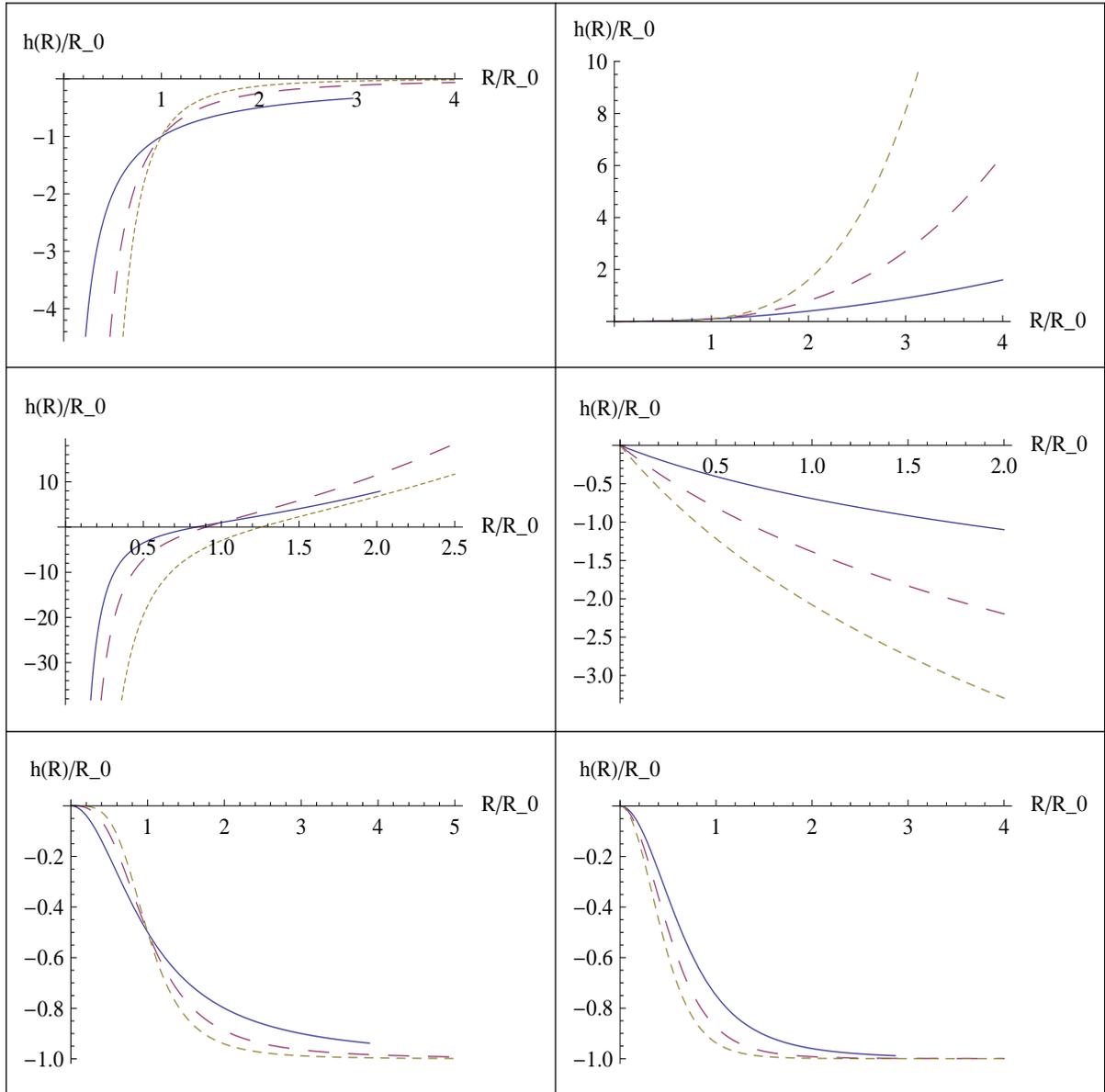


Figura 1.1: Gráficos da função $h(R)$ para alguns casos estudados na literatura. Da esquerda para direita, de cima para baixo, estão expostos os seguintes modelos:

(1) $h(R) = -\alpha R_0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^n$, com $\alpha = 1$ e $n = -1$ (linha contínua), $\alpha = 1$ e $n = -2$ (pontilhado longo), $\alpha = 1$ e $n = -3$ (pontilhado curto) (Carroll et al. 2004);

(2) $h(R) = \alpha R_0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^n$, com $\alpha = 0.1$ e $n = 2$ (linha contínua), $\alpha = 0.1$ e $n = 3$ (pontilhado longo), $\alpha = 0.1$ e $n = 4$ (pontilhado curto) (Capozziello et al. 2003);

(3) $h(R) = -\frac{\alpha R_0^3}{R^2} + \beta R_0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^2$, com $\alpha = 1$ e $\beta = 2$ (linha contínua), $\alpha = 2$ e $\beta = 3$ (pontilhado longo), $\alpha = 2$ e $\beta = 3$ (pontilhado curto) (Nojiri & Odintsov 2003);

(4) $h(R) = -\alpha R_0 \ln \left[1 + \left(\frac{R}{R_0}\right)\right]$ com $\alpha = 1$ (linha contínua), $\alpha = 2$ (pontilhado longo), $\alpha = 3$ (pontilhado curto) (Miranda et al. 2009b);

(5) $h(R) = -\frac{\alpha R_0}{1 + \beta \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-n}}$, com $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ e $n = 2$ (linha contínua), $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ e $n = 3$ (pontilhado longo), $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ e $n = 4$ (pontilhado curto) (Hu & Sawicki 2007a);

(6) $h(R) = \alpha R_0 \left(\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right)^n} - 1 \right)$, com $\alpha = 1$ e $n = 2$ (linha contínua), $\alpha = 1$ e $n = 3$ (pontilhado longo), $\alpha = 1$ e $n = 4$ (pontilhado curto) (Starobinsky 2007).

1.2 Equivalência com teorias do tipo escalar-tensorial

Nesta seção, a equivalência existente, entre as teorias $f(R)$ e um caso particular das teorias de Brans-Dicke, é demonstrada. Essa classe, por sua vez, pertence ao grupo de teorias escalar-tensorial. A utilização dessa correspondência é vantajosa por diversas razões. Em primeiro lugar, ela permite visualizar, com mais evidência, os graus de liberdade adicionais presentes nas $f(R)$, com relação à Relatividade Geral (Faulkner, Tegmark, Bunn & Mao 2007). Em segundo lugar, resultados, referentes à estabilidade de soluções cosmológicas, são demonstrados, pressupondo a validade desse resultado (Sawicki & Hu 2007).

Em terceiro lugar, a introdução de um novo campo escalar, necessária na demonstração dessa equivalência, possibilita a redução da ordem das equações de campo à metade (Hindawi, Ovrut & Waldram 1996), à custa da introdução de novas igualdades. Por último, o formalismo existente, para a análise das teorias escalar-tensorial, possibilita uma melhor compreensão do papel desempenhado pelas não linearidades das equações de campo. Em particular, uma íntima relação entre os efeitos não lineares e as previsões das teorias $f(R)$, para observáveis vinculados nos testes clássicos da gravitação, é demonstrada. (Khoury & Weltman 2004a, Khoury & Weltman 2004b, Tamaki & Tsujikawa 2008, Brax, van de Bruck, Davis & Shaw 2008).

O cálculo a ser apresentado nesta seção considera, inicialmente, o caso particular $f(R) = R + R_0(R/R_0)^2$ (Carroll et al. 2004). De acordo com Hindawi et al. (1996), é possível reduzir a ordem das equações de campo, por intermédio da introdução de um campo escalar adicional, designado λ , conforme verificado na igualdade que se segue:

$$\begin{aligned} S_{\text{grav}} &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R + R_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 - R_0 \left(\frac{R}{R_0} - \frac{\lambda}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[(1 + \lambda) R - R_0 \frac{\lambda^2}{4} \right]. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Na expressão acima, o parâmetro S_{grav} corresponde, por definição, à parte puramente geométrica da ação, utilizada na demonstração das equações de campo. A variação de S_{grav} , no tocante ao campo escalar λ , resulta na fórmula $2R = R_0\lambda$. Assim, a lagrangiana presente em (1.18), quando minimizada, de forma independente, com relação às componentes da métrica e do campo escalar, λ , prediz equações de campo equivalentes às obtidas por meio

da minimização da função $f(R) = R + R_0 (R/R_0)^2$, com relação somente aos elementos da métrica. A partir da definição $\chi := \lambda + 1$ e da posterior substituição desse novo campo em (1.18), a igualdade

$$S_{\text{grav}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\chi R - \frac{R_0 (\chi - 1)^2}{4} \right] \quad (1.19)$$

é demonstrada.

No caso geral, o mesmo procedimento algébrico é empregado (Hindawi et al. 1996). Inicialmente, um campo escalar auxiliar, denominado λ , é definido e, em seguida, a ação

$$S_{\text{grav}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{df(\lambda)}{d\lambda} (R - \lambda) + f(\lambda) \right] \quad (1.20)$$

é postulada. Os campos λ e R são, por hipótese, independentes. Nas situações em que a derivada $d^2f(\lambda)/d\lambda^2$ não assume valor nulo, a minimização da ação (1.20), com relação à variável λ , resulta na igualdade $\lambda = R$. Nesse, e somente nesse caso, as ações (1.1) e (1.20) são equivalentes.

No entanto, a lagrangiana, presente na ação (1.20), é uma função afim no escalar de Ricci. Como consequência, as equações de campo, obtidas a partir do princípio variacional, não contêm derivadas covariantes desse escalar, resultando em equações diferenciais de segunda ordem nos elementos da métrica. Por meio da substituição da definição $\chi := df(\lambda)/d\lambda$ em (1.20), a expressão

$$S_{\text{grav}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\chi R}{2\kappa^2} - \chi^2 V(\chi) \right] \quad (1.21)$$

é obtida. O potencial $V(\chi)$ é, nesse caso, igual a

$$V(\chi) := \frac{1}{2\kappa^2 \chi^2} [\lambda(\chi)\chi - f(\lambda(\chi))] . \quad (1.22)$$

A ação (1.21) é equivalente a um caso particular das teorias do tipo escalar-tensorial. A parte puramente geométrica dessas teorias é igual a

$$S_{\text{grav}} := \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\chi R}{2\kappa^2} - \omega_{BD} \frac{\nabla_\alpha \chi \nabla^\alpha \chi}{2\kappa^2 \chi} - U(\chi) \right] \quad (1.23)$$

por definição. A quantidade ω_{BD} , presente na expressão acima, é designada parâmetro de Brans-Dicke. A equivalência com as teorias $f(R)$ ocorre para o caso em que ω_{BD} é nulo.

A partir do princípio da mínima ação, as equações de campo são demonstradas para o caso geral das teorias do tipo Brans-Dicke. Como exemplo particular, as expressões para $\omega_{BD} = 0$ são obtidas. Para teorias do tipo escalar-tensorial, as formulações métricas e de Palatini não são equivalentes. Em conformidade com a restrição, explicitada na seção anterior, referente à análise das teorias $f(R)$, os capítulos posteriores não estudam as equações de campo obtidas na formulação de Palatini. Os símbolos de Christoffel são, por conseguinte, presumidos.

Mediante a utilização das relações demonstradas na seção anterior, a ação (1.23) é minimizada. Inicialmente, a expressão

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta S \\
 &= \int d^4x \left[\delta(\sqrt{-g}) \left(\frac{\chi R}{2\kappa^2} - \omega_{BD} \frac{\nabla_\alpha \chi \nabla^\alpha \chi}{2\kappa^2 \chi} - U(\chi) \right) + \sqrt{-g} \left(\frac{\chi \delta R}{2\kappa^2} \right) \right] - \\
 &\quad - \int d^4x \sqrt{-g} \left(\omega_{BD} \delta(g^{\alpha\beta}) \frac{\nabla_\alpha \chi \nabla_\beta \chi}{2\kappa^2 \chi} \right) + \delta S_{\text{mat}} \\
 &= \int d^4x \left[\frac{\chi}{2\kappa^2} (R \delta \sqrt{-g} + \delta R \sqrt{-g}) \right] + \omega_{BD} \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa^2} \left[\frac{\nabla_\theta \chi \nabla^\theta \chi}{2\chi} g_{\alpha\beta} - \frac{\partial_\alpha \chi \partial_\beta \chi}{\chi} \right] \delta g^{\alpha\beta} + \\
 &\quad + \int d^4x \left[\frac{\sqrt{-g}}{2} U(\chi) g_{\alpha\beta} \right] \delta g^{\alpha\beta} + \delta S_{\text{mat}} . \tag{1.24}
 \end{aligned}$$

é obtida. Nessas igualdades, o emprego da fórmula (1.7) é indispensável para isolar, em todas as parcelas do integrando, o fator $\delta g^{\alpha\beta}$. Além disso, o termo envolvendo a variação do escalar de Ricci necessita ser expandido. Para destrinchá-lo, as expressões (1.8), (1.9) e (1.11) são fundamentais, conforme verificado no desenvolvimento

$$\begin{aligned}
 \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\chi \delta R}{2\kappa^2} &= \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\chi}{2\kappa^2} (R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta}) \\
 &= \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\chi}{2\kappa^2} [R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} (\nabla_\rho \delta \Gamma^\rho_{\beta\alpha} - \nabla_\beta \delta \Gamma^\rho_{\rho\alpha})] \\
 &= \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\chi}{2\kappa^2} [R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} + \nabla_\rho (g^{\alpha\beta} \delta \Gamma^\rho_{\beta\alpha} - g^{\alpha\rho} \delta \Gamma^\beta_{\beta\alpha})] \\
 &= \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa^2} [\chi R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} + \nabla_\rho \chi (\nabla_\alpha \delta g^{\rho\alpha} - g^{\alpha\rho} \nabla_\alpha \delta g^\mu_\mu)] \\
 &= \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa^2} [\chi R_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha \nabla_\beta \chi + g_{\alpha\beta} g^{\mu\rho} \nabla_\mu \nabla_\rho \chi] \delta g^{\alpha\beta} . \tag{1.25}
 \end{aligned}$$

Para obter as equações de campo, é indispensável a substituição do resultado obtido em (1.25) na variação da ação (1.24). Nesse caso, essas equações de campo são iguais a

$$\chi G_{\alpha\beta} + \omega_{BD} \left(\frac{\nabla_\theta \chi \nabla^\theta \chi}{2\chi} g_{\alpha\beta} - \frac{\nabla_\alpha \chi \nabla_\beta \chi}{\chi} \right) - \nabla_\alpha \nabla_\beta \chi + g_{\alpha\beta} \nabla^\theta \nabla_\theta \chi + \kappa^2 U(\chi) g_{\alpha\beta} = \kappa^2 T_{\alpha\beta} . \quad (1.26)$$

Para demonstrar a equivalência existente, no caso particular $\omega_{BD} = 0$, entre as equações de campo (1.14) e as equações de campo (1.26), é imprescindível efetuar as substituições $\chi = f_R$ e $U(\chi) = \chi^2 V(\chi)$, com $V(\chi)$ definido em (1.22), conforme explicitado na equação

$$\begin{aligned} \kappa^2 T_{\alpha\beta} &= f_R G_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha \nabla_\beta f_R + g_{\alpha\beta} \nabla^\theta \nabla_\theta f_R + \kappa^2 f_R^2 V(f_R) g_{\alpha\beta} \\ &= f_R \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} \right) - \nabla_\alpha \nabla_\beta f_R + g_{\alpha\beta} \nabla^\theta \nabla_\theta f_R + \frac{1}{2} (R f_R - f(R)) g_{\alpha\beta} \\ &= f_R R_{\alpha\beta} - \frac{f(R)}{2} g_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha \nabla_\beta f_R + g_{\alpha\beta} \nabla^\theta \nabla_\theta f_R . \end{aligned} \quad (1.27)$$

As teorias do tipo escalar-tensorial são invariantes sob transformações conformes (Flanagan 2004). Elas são caracterizadas pela regra

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x^\mu) g_{\mu\nu} , \quad (1.28)$$

parametrizada por uma função, $\Omega(x^\mu)$, nomeada fator conforme (Carroll 2004). De acordo com Dicke (1962), essas transformações equivalem a alterações no sistema de unidades utilizado nas medições de diversas grandezas físicas, tais como distância, tempo e massa. Por exemplo, é designado moldura de Jordan o sistema de unidades construído a partir da física de partículas. Por intermédio da transformação

$$\tilde{g}_{\mu\nu} := \chi g_{\mu\nu} , \quad (1.29)$$

com $\chi := df(R)/dR$, a moldura de Einstein é postulada. Nela, a ação (1.21) adquire a forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{\tilde{R}}{2\kappa^2} - \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - V(\phi) \right] + S_{\text{mat}}[\tilde{g}_{\mu\nu} e^{\frac{2\phi}{\sqrt{6}}}, \Psi] . \quad (1.30)$$

Na igualdade (1.30), o campo ϕ é definido por meio da equação $\chi = e^{-2\phi/\sqrt{6}}$, e a função $V(\chi(\phi))$ corresponde ao potencial enunciado na fórmula (1.22). Além disso, a ação das interações não gravitacionais, representadas pela letra grega Ψ , foi explicitada, pois a transformação conforme altera o acoplamento desses elementos com as componentes da métrica. As equações de campo são, nessa nova moldura, iguais a

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{R} - \kappa^2 \left[\partial_\mu \partial_\nu \phi + \tilde{g}_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \phi + V(\phi) \right) \right] = \kappa^2 \tilde{T}_{\mu\nu} \quad (1.31)$$

e a

$$\square\phi = \frac{dV}{d\phi} + \sum_i \frac{\kappa^2}{\sqrt{6}} e^{\frac{4\phi}{\sqrt{6}}} \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{T}_{\alpha\beta}^{(i)}. \quad (1.32)$$

Ao contrário do que ocorre na moldura de Jordan, o tensor energia-momento, $\tilde{T}_{\mu\nu}$, não é conservado.

A compreensão dos efeitos, nos observáveis presentes no Sistema Solar, das não linearidades das equações de campo das teorias $f(R)$ é, usualmente, desenvolvida na moldura de Einstein (Khoury & Weltman 2004a, Khoury & Weltman 2004b). Apesar da utilidade dessas transformações, é necessário prudência na comparação de resultados demonstrados em diferentes molduras. A equivalência física entre duas teorias, do tipo escalar-tensorial, relacionadas por uma transformação conforme, depende de uma reinterpretação tanto das variáveis físicas, tais como a densidade de energia de matéria, quanto dos parâmetros geométricos, a exemplo do tensor de Riemann. Esse procedimento é fundamental, pois a forma funcional dessas grandezas não é, em geral, invariante sob essas transformações (Dicke 1962).

Falsos questionamentos podem ser formulados quando parâmetros físicos e geométricos, definidos em diferentes molduras, não são interpretados corretamente (Flanagan 2004). Por exemplo, é possível indagar sobre como uma teoria, do tipo escalar-tensorial, cujo o campo escalar não é minimamente acoplado com os elementos da métrica, tal como ocorre em (1.23), é equivalente ao caso expresso em (1.30), cujo campo escalar é minimamente acoplado. Na moldura de Einstein, o valor de grandezas como massa, comprimento e tempo, avaliados num determinado ponto, x_μ , do espaço-tempo, depende do valor do campo χ nesse mesmo ponto.

Portanto, para uma correta comparação com dados observacionais, que são sempre medidos nas unidades obtidas a partir da física de partículas, as previsões teóricas têm que

ser enunciadas na moldura de Jordan, mesmo que tenham sido demonstradas numa outra moldura arbitrária. A respeito dessas precauções, uma discussão minuciosa é exibida em Flanagan (2004).

Capítulo 2

Introdução à Evolução Cosmológica

2.1 Introdução

Neste capítulo, a evolução das componentes da métrica e do tensor energia-momento é analisada no contexto da cosmologia. A evolução temporal dessas grandezas é calculada por intermédio das equações de campo (1.16) aplicadas à métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Essa, por sua vez, é definida a partir do elemento de linha

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (2.1)$$

Na dedução das equações de Friedman generalizadas, a nulidade da curvatura tridimensional é pressuposta, implicando a igualdade $k = 0$. Esse caso corresponde a um universo homogêneo e isotrópico em que todas as seções espaciais têm um escalar de curvatura nulo. Objeções a essa imposição arbitrária podem ser formuladas de maneira legítima. A motivação subjacente a essa escolha reside no fato que as teorias $f(R)$ devem obter uma cosmologia similar à predita pelo modelo Λ CDM. Esse é um vínculo essencial para a concordância desses modelos com as observações referentes, em especial, à Radiação Cósmica de Fundo. Em caso de necessidade, o mesmo procedimento a ser desenvolvido neste capítulo pode ser utilizado para demonstrar as equações no caso em que $k \neq 0$.

A primeira equação de evolução equivale à componente 00 das equações de campo (1.16). As expressões, para as componentes relevantes do tensor de Ricci e dos símbolos de Christoffel, são calculadas a partir do elemento de linha (2.1). Os detalhes algébricos dessa

demonstração podem ser verificados em Carroll (2004) e em Wald (1984). Por conseguinte, esses passos são omitidos. Os resultados são expostos nas igualdades

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= 0, \\ \Gamma^0_{11} = \Gamma^0_{22} = \Gamma^0_{33} &= a\dot{a}, & \Gamma^0_{ij} &= 0 \quad (i \neq j), \\ R_{00} &= -\frac{3\ddot{a}}{a}, & R &= 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] = 6\dot{H} + 12H^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

O emprego das componentes dos símbolos de Christoffel possibilita o cálculo das derivadas covariantes do campo f_R . Elas são iguais a

$$\begin{aligned} \nabla_0 \nabla_0 (f_R) &= \partial_0 \partial_0 (f_R) - \Gamma^\delta_{00} \partial_\delta (f_R) \\ &= \partial_0 \partial_0 (f_R) - \Gamma^0_{00} \partial_0 (f_R) \\ &= \ddot{f}_R \end{aligned} \quad (2.3)$$

e a

$$\begin{aligned} \nabla^\mu \nabla_\mu (f_R) &= \partial^\mu \partial_\mu (f_R) - g^{\epsilon\theta} \Gamma^\delta_{\epsilon\theta} \partial_\delta (f_R) \\ &= \ddot{f}_R + 3 \frac{a\dot{a}}{a^2} (f_R). \end{aligned} \quad (2.4)$$

A substituição, nas equações de campo (1.14), dos resultados expressos em (2.2), (2.3) e (2.4), implica a obtenção da expressão

$$3H^2 f_R - \frac{1}{2} (f_R R - f(R)) + 3H \dot{f}_R = \kappa^2 (\rho_m + \rho_{\text{rad}}). \quad (2.5)$$

A igualdade acima é designada primeira equação de Friedman generalizada. No lado direito, os parâmetros ρ_m e ρ_{rad} correspondem à densidade de energia de matéria não relativística e de radiação. Para demonstrar a segunda equação de Friedman, a derivada, com respeito à coordenada temporal, de ambos os lados da fórmula (2.5) é calculada. Posteriormente, a expressão referente à conservação do tensor energia-momento é empregada,

conforme relatado a seguir:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \left[3H^2 f_R - \frac{1}{2} (f_R R - f(R)) + 3H \dot{f}_R \right] = \\
 & = \left[6H \dot{H} f_R + 3H^2 \dot{f}_R \right] - \frac{1}{2} \left[\dot{R} f_R + R \dot{f}_R - \dot{f} \right] + 3 \left[\dot{H} \dot{f}_R + H \ddot{f}_R \right] \\
 & = 3H \left[2\dot{H} f_R + H \dot{f}_R - \frac{\dot{f}_R}{H} (\dot{H} + 2H^2) + \frac{\dot{H} \dot{f}_R}{H} + \ddot{f}_R \right] \\
 & = 3H \left[2\dot{H} f_R - H \dot{f}_R + \ddot{f}_R \right] \\
 & = \kappa^2 (\dot{\rho}_m + \dot{\rho}_{\text{rad}}) \\
 & = -3H \kappa^2 \left(\rho_m + \frac{4}{3} \rho_{\text{rad}} \right). \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

Mediante o cancelamento dos fatores comuns aos dois lados dessa igualdade, a segunda equação de Friedman,

$$-2\dot{H} f_R + H \dot{f}_R - \ddot{f}_R = \kappa^2 \left(\rho_m + \frac{4}{3} \rho_{\text{rad}} \right), \tag{2.7}$$

é obtida.

Conforme demonstrado em Amendola, Gannouji, Polarski & Tsujikawa (2007), é possível transformar as equações (2.5) e (2.7) num sistema autônomo, por intermédio das definições

$$\begin{aligned}
 x_1 & := -\frac{\dot{f}_R}{H f_R}, & x_2 & := -\frac{f(R)}{6FH^2}, \\
 x_3 & := \frac{R}{6H^2}, & x_4 & := \kappa^2 \frac{\rho_{\text{rad}}}{6H^2 f_R}. \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

Para demonstrar a existência desse novo sistema, em primeiro lugar, a derivada

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dN} &= \frac{1}{H} \frac{dx_1}{dt} \\
 &= -\frac{1}{H} \left[\frac{\ddot{f}_R}{H f_R} - \frac{\dot{f}_R \dot{H}}{H^2 f_R} - \frac{\dot{f}_R^2}{H f_R^2} \right] \\
 &= -\frac{1}{H} \left[-H \left(\frac{2\dot{H}}{H^2} + \frac{\kappa^2 \rho_m}{H^2 f_R} + \frac{4\kappa^2 \rho_{\text{rad}}}{3H^2 f_R} - \frac{\dot{f}_R}{H f_R} \right) - \frac{\dot{f}_R \dot{H}}{H^2 f_R} - \frac{\dot{f}_R^2}{H f_R^2} \right] \\
 &= \frac{2\dot{H}}{H^2} + \frac{\kappa^2 \rho_m}{H^2 f_R} + \frac{4\kappa^2 \rho_{\text{rad}}}{3H^2 f_R} - \frac{\dot{f}_R}{H f_R} + \frac{\dot{f}_R \dot{H}}{H^3 f_R} + \frac{\dot{f}_R^2}{H^2 f_R^2} \\
 &= [2(x_3 - 2)] + [3(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)] + 4x_4 + x_1 + [-x_1(x_3 - 2)] + x_1^2 \\
 &= -x_3 - 1 - 3x_2 + x_1^2 - x_1 x_3 + x_4, \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

é calculada, com $N := \ln(a(t))$. Na passagem da segunda para a terceira linha, a equação (2.7) foi empregada para remover o termo proporcional à derivada $d^2 f_{RR}/dt^2$.

Em segundo lugar, o cálculo da derivada

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_2}{dN} &= \frac{1}{H} \frac{dx_2}{dt} \\
 &= \frac{1}{H} \left[-\frac{\dot{f}(R)}{6H^2 f_R} + \frac{2\dot{H} f(R)}{6H^3 f_R} + \frac{f(R)\dot{f}_R}{6H^2 f_R^2} \right] \\
 &= -\frac{\dot{R}}{6H^3} + \frac{2\dot{H} f(R)}{6H^4 f_R} + \frac{f(R)\dot{f}_R}{6H^3 f_R^2} \\
 &= -\frac{f_{RR}\dot{R}}{6f_{RR}H^3} + \frac{f(R)}{3H^2 f_R} \frac{\dot{H}}{H^2} + \left(-\frac{f(R)}{6H^2 f_R} \right) \left(-\frac{\dot{f}_R}{H f_R} \right) \\
 &= -\frac{\dot{f}_R}{6f_{RR}H^3} + -2x_2(x_3 - 2) + x_1 x_2 \\
 &= \left(-\frac{\dot{f}_R}{H f_R} \right) \left(\frac{R}{6H^2} \right) \left(\frac{f_R}{R f_{RR}} \right) - 2x_2(x_3 - 2) + x_1 x_2 \\
 &= \frac{x_1 x_3}{m} - 2x_2(x_3 - 2) + x_1 x_2 \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

é apresentado. Nessa expressão, o fator adimensional m é definido por intermédio da igualdade

$$m := \frac{R f_{RR}}{f_R}. \tag{2.11}$$

Em terceiro lugar, a derivada

$$\begin{aligned}
\frac{dx_3}{dN} &= \frac{1}{H} \frac{dx_3}{dt} \\
&= \frac{1}{H} \left[\frac{\dot{R}}{6H^2} - \frac{2R\dot{H}}{6H^3} \right] \\
&= -\frac{x_1 x_3}{m} - 2x_3 (x_3 - 2)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

é exibida e, finalmente, a derivada da variável x_4 , com respeito ao logaritmo do fator de escala, é, na sequência, avaliada:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_4}{dN} &= \frac{1}{H} \frac{dx_4}{dt} \\
&= \frac{1}{H} \left[\frac{\kappa^2 \dot{\rho}_{\text{rad}}}{3H^2 f_R} - \frac{2\kappa^2 \rho_{\text{rad}} \dot{H}}{3H^3 f_R} - \frac{-\kappa^2 \rho_{\text{rad}} \dot{f}_R}{3H^2 f_R^2} \right] \\
&= -4 \frac{\kappa^2 \rho_{\text{rad}}}{3H^2 f_R} - \frac{2\kappa^2 \rho_{\text{rad}}}{3H^2 f_R} \frac{\dot{H}}{H^2} - \frac{-\kappa^2 \rho_{\text{rad}}}{3H^2 f_R} \frac{\dot{f}_R}{H f_R} \\
&= -4x_4 - 2x_4(x_3 - 2) + x_1 x_4 .
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Na passagem da segunda para a terceira linha desse desdobramento, a equação de conservação para a componente de radiação foi utilizada para remover o fator proporcional à derivada primeira da densidade de energia de radiação, com respeito ao tempo.

As equações (2.9), (2.10), (2.12) e (2.13) formam um sistema autônomo. O parâmetro m , definido em (2.11), pode ser reescrito como função do fator r . Esse termo é, em contrapartida, definido a partir da igualdade

$$r := -\frac{Rf_R}{f(R)} = \frac{x_3}{x_2} . \tag{2.14}$$

As fórmulas (2.11) e (2.14) fecham o sistema de equações para as variáveis x_1 , x_2 , x_3 e x_4 . O próximo passo na análise da dinâmica cosmológica, prevista pelas teorias $f(R)$, consiste na obtenção dos pontos críticos do sistema de equações autônomas. Previamente, contudo,

as definições

$$\Omega_m := \frac{\kappa^2 \rho_m}{3H^2 f_R}, \quad (2.15)$$

$$\Omega_{\text{rad}} := x_4, \quad (2.16)$$

$$\bar{\Omega}_{\text{EE}} := x_1 + x_2 + x_3 \quad (2.17)$$

são apresentadas. Essas igualdades envolvem as densidades de energia de matéria não relativística e de radiação, além de grandezas geométricas, definidas a partir de uma analogia explícita com variáveis empregadas em modelos de energia escura que pressupõem a validade das equações de Einstein (Amendola, Gannouji, Polarski & Tsujikawa 2007, Amendola, Polarski & Tsujikawa 2007). Por intermédio da divisão de ambos os lados da equação (2.5) pelo fator $3H^2 f_R$, a primeira equação de Friedman generalizada é reescrita como função dos parâmetros Ω_m , Ω_{rad} e $\bar{\Omega}_{\text{EE}}$, conforme demonstrado na expressão

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\kappa^2 \rho_m}{3H^2 f_R} + \frac{\kappa^2 \rho_{\text{rad}}}{3H^2 f_R} - \frac{f_R R}{6H^2 f_R} - \frac{f(R)}{6H^2 f_R} - \frac{3H \dot{f}_R}{3H^2 f_R} \\ &= \frac{\kappa^2 \rho_m}{3H^2 f_R} + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ &= \Omega_m + \Omega_{\text{rad}} + \bar{\Omega}_{\text{EE}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

No contexto das teorias $f(R)$, o parâmetro $\bar{\Omega}_{\text{EE}}$ deve ser interpretado como sendo apenas um agrupamento particular do conjunto de modificações que a ação (1.2) introduz nas equações de campo, quando essas são comparadas com as equações de campo de Einstein. É importante mencionar, no entanto, que existem outras maneiras de incorporar essas alterações. Em particular, Amendola, Gannouji, Polarski & Tsujikawa (2007) e Amendola, Polarski & Tsujikawa (2007) utilizam as definições

$$\tilde{\Omega}_m := \frac{\kappa^2 \rho_m}{3H^2 f_R(\bar{R})}, \quad (2.19)$$

$$\tilde{\Omega}_{\text{rad}} := \frac{\kappa^2 \rho_{\text{rad}}}{3H^2 f_R(\bar{R})}, \quad (2.20)$$

$$\tilde{\Omega}_{\text{EE}} := \frac{f_R}{f_R(\bar{R})} \left[x_1 + x_2 + x_3 + \frac{f_R(\bar{R})}{f_R} - 1 \right]. \quad (2.21)$$

Nas expressões acima, \bar{R} é um parâmetro igual ao valor do escalar de Ricci em $z = 0$. Além disso, o fator $f_R(\bar{R})$ corresponde ao valor da função f_R avaliada em $R = \bar{R}$. A partir dessas definições, a equivalência existente entre a equação (2.5) e a igualdade

$$1 = \tilde{\Omega}_m + \tilde{\Omega}_{\text{rad}} + \tilde{\Omega}_{\text{EE}} \quad (2.22)$$

é comprovada.

Todas as possíveis definições correspondem à densidade de energia e à pressão da energia escura, além de uma equação de estado (Amendola, Gannouji, Polarski & Tsujikawa 2007, Amendola, Polarski & Tsujikawa 2007, Amendola & Tsujikawa 2008). Todavia, elas não predizem, de modo necessário, valores idênticos para essas variáveis, mas isso não é relevante, na medida em que todas prevêm uma dinâmica análoga para o fator de escala e para a função de Hubble (Miranda et al. 2009b). Por exemplo, divergências na equação de estado da energia escura, obtidas numa determinada escolha para densidade de energia e pressão associada à energia escura, podem não corresponder a problemas físicos do modelo, pois é possível que uma outra definição dessas variáveis apresente um comportamento regular.

As definições (2.17) e (2.21) correspondem a uma densidade de energia

$$\kappa^2 \bar{\rho}_{\text{EE}} = \frac{f_R R - f(R)}{2} - 3H \dot{f}_R + 3H^2 (f_R(\bar{R}) - f_R), \quad (2.23)$$

a uma pressão

$$\kappa^2 \bar{p}_{\text{EE}} = \ddot{f}_R + 2H \dot{f}_R - \frac{f_R R - f(R)}{2} - (2\dot{H} + 3H^2) (f_R(\bar{R}) - f_R) \quad (2.24)$$

e a uma equação de estado

$$\begin{aligned} \bar{w}_{\text{EE}} = \frac{\bar{p}_{\text{EE}}}{\bar{\rho}_{\text{EE}}} &= -1 + \frac{\ddot{f}_R - 2H\dot{f}_R - 4\dot{H}(f_R(\bar{R}) - f_R)}{f_R R - f(R) - 6H\dot{f}_R + 6H^2(f_R(\bar{R}) - f_R)} \\ &= \frac{-1}{3} \frac{2x_3 - 1 + x_4 y}{1 - y(\Omega_m + \Omega_{\text{rad}})} \end{aligned} \quad (2.25)$$

relacionado à energia escura, com o parâmetro y definido por meio da igualdade $y = f_R/f_R(\bar{R})$. Segundo Amendola & Tsujikawa (2008), modelos $f(R)$ semelhantes à lagrangiana de Einstein-Hilbert, acrescida de uma constante cosmológica, produzem divergências na equação de estado \bar{w}_{EE} . Por um lado, na era dominada pela matéria não relativística, a desigualdade $\Omega_m \approx 1$ e $y > 1$ é satisfeita, o que implica em $1 - y(\Omega_m + \Omega_{\text{rad}}) < 0$. Por outro lado, durante a fase final acelerada, a expressão $\Omega_m \approx 0$ e $y \approx 1$ é válida, o que acarreta em $1 - y(\Omega_m + \Omega_{\text{rad}}) > 0$. Logo, existe um valor para o desvio para o vermelho em que a quantidade $1 - y(\Omega_m + \Omega_{\text{rad}})$ é nula, demonstrando a existência de uma divergência no parâmetro \bar{w}_{EE} .

O comportamento singular na equação de estado da energia escura não implica, no entanto, em divergência nas grandezas físicas e geométricas, incluindo o fator de escala, a densidade de energia de matéria não relativística ou a função de Hubble, pois eles se mantêm regulares ao longo da evolução cosmológica, mesmo no valor do desvio para o vermelho em que a divergência na equação de estado ocorre. Conforme mencionado, diferentes definições para a densidade de energia e a pressão da energia escura resultam em diferentes comportamentos para a equação de estado dessa componente sem, todavia, modificar a dinâmica dessas grandezas. As divergências relatadas em Amendola & Tsujikawa (2008) estão associadas à maneira pela qual esses autores agrupam as modificações introduzidas pelas teorias $f(R)$ nas equações de campo, com relação às equações de Einstein.

De acordo com Miranda et al. (2009b), é possível eliminar o comportamento singular descrito em Amendola & Tsujikawa (2008) para a equação de estado da energia escura, utilizando as seguintes definições para densidade de energia e pressão de energia escura:

$$\kappa^2 \rho_{\text{EE}} = \frac{f_R R - f(R)}{2} - 3H\dot{f}_R + 3H^2(1 - f_R), \quad (2.26)$$

$$\kappa^2 p_{\text{EE}} = \ddot{f}_R + 2H\dot{f}_R - (2\dot{H} + 3H^2)(1 - f_R) + \frac{(f(R) - f_{RR})}{2}. \quad (2.27)$$

O comportamento regular da quantidade $w_{\text{EE}} = p_{\text{EE}}/\rho_{\text{EE}}$ pode ser diretamente verificado, num modelo particular proposto em Miranda et al. (2009b), nas figuras (2.14) e (2.15). Um outro comportamento interessante de w_{EE} é que sempre cruza, durante um intervalo finito do desvio para o vermelho, o limite $w_{\text{EE}} = -1$ em funções $f(R)$ semelhantes à lagrangiana de Einstein-Hilbert, acrescida de uma constante cosmológica, no limite $R \gg \bar{R}$, conforme verificado na figura 2.1 (Motohashi, Starobinsky & Yokoyama 2010). Entretanto, a equação de estado efetiva que, conforme será definido adiante, corresponde à razão entre a pressão e a densidade de energia total no universo, nunca admite uma expansão do tipo *phantom* e, portanto, o fator de escala apresenta uma dinâmica regular nesses modelos.

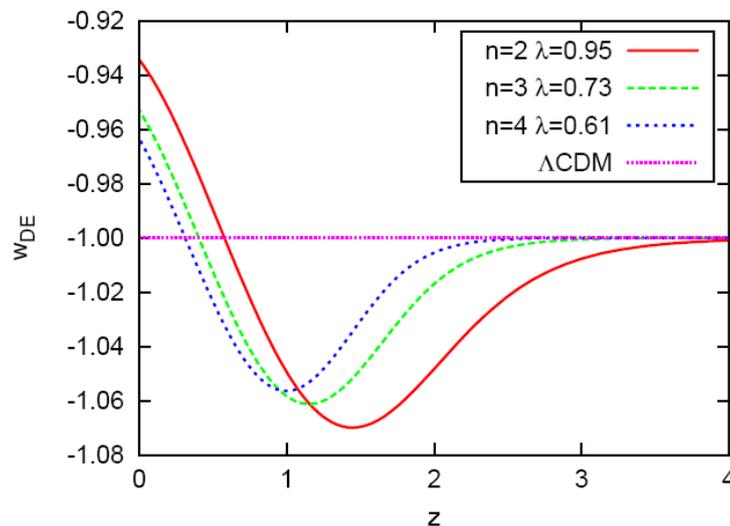


Figura 2.1: Na figura acima, o comportamento da equação de estado $w_{\text{EE}} = p_{\text{EE}}/\rho_{\text{EE}}$, previsto pelo modelo $f(R) = R + \lambda R_0 \left[\left(1 + \frac{R^2}{R_0^2} \right)^{-n} - 1 \right]$, para diferentes valores dos parâmetros n e λ . Fonte: Motohashi et al. (2010)

A equação de estado efetiva é definida, por conveniência, por intermédio das equações de Friedman demonstradas a partir da teoria da Relatividade Geral (Amendola, Gannouji, Polarski & Tsujikawa 2007). Mediante o cálculo desse parâmetro, é possível acompanhar a evolução temporal do fator de escala. Por exemplo, uma equação de estado $w_{\text{eff}} := P/\rho = 0$ corresponde a uma evolução do fator de escala proporcional a $t^{2/3}$. Já a igualdade $w_{\text{eff}} = 1/3$ equivale a uma dependência proporcional a $t^{1/2}$ (Weinberg 2008, Carroll 2004).

Para especificar a equação de estado, w_{eff} , como função dos fatores x_1 , x_2 , x_3 e x_4 , é necessário enunciar as equações de Friedman obtidas na teoria da Relatividade Geral. Elas são iguais a (Weinberg 2008, Carroll 2004)

$$H^2 = \kappa^2 \sum_i \rho_i , \quad (2.28)$$

e a

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = -\frac{\kappa^2}{2} \sum_i (\rho_i + 3p_i) . \quad (2.29)$$

O somatório, presente nas fórmulas acima, compreende as diferentes componentes para a densidade de energia e a pressão no universo, a exemplo da matéria escura, dos neutrinos, da radiação e da energia escura. Por meio de uma substituição, na equação (2.29), da expressão (2.28), governante da dinâmica da densidade de energia total no universo, as igualdades

$$\begin{aligned} \dot{H} + H^2 &= -\frac{\kappa^2}{2} \sum_i (\rho_i + 3p_i) \\ &= -\frac{\kappa^2}{2} \left[\sum_i \rho_i \right] \left(1 + 3 \frac{\sum_i p_i}{\sum_i \rho_i} \right) \\ &= -\frac{H^2}{2} (1 + 3w_{\text{eff}}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

são demonstradas. Mediante um rearranjo dos termos presentes no desdobramento acima, a equação de estado efetiva

$$\begin{aligned} w_{\text{eff}} &= -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2} \\ &= -1 - \frac{2}{3}(x_3 - 2) \\ &= -\frac{1}{3}(2x_3 - 1) \end{aligned} \quad (2.31)$$

é reescrita como função do parâmetro x_3 .

2.2 Pontos Críticos

Nesta seção, os pontos críticos do sistema de equações autônomo, formado pelas expressões (2.9), (2.10), (2.12) e (2.13), são calculados. Inicialmente, a igualdade $x_4 = 0$ é pressuposta, o que equivale desprezar a influência da radiação e da matéria relativística. Do ponto de vista empírico, essa hipótese é bem fundamentada, pois a presença dessa componente não deve influenciar, de forma significativa, a existência de pontos críticos relacionados a uma fase transiente dominada pela matéria não relativística e a um atrator final dotado de um fator de escala acelerado. Durante a quase totalidade dos períodos mencionados, a contribuição da radiação, para densidades de energia e pressão no universo, é insignificante.

As definições

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1, x_2, x_3) &:= -1 - x_3 - 3x_2 + x_1^2 - x_1x_3 , \\
 f_2(x_1, x_2, x_3) &:= \frac{x_1x_3}{m(r)} - x_2(2x_3 - 4 - x_1) , \\
 f_3(x_1, x_2, x_3) &:= -\frac{x_1x_3}{m(r)} - 2x_3(x_3 - 2) ,
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

são convenientes para identificação dos pontos críticos do sistema de equações nas variáveis x_1 , x_2 , x_3 e x_4 . As expressões (2.9), (2.10), (2.12) e (2.13) são, mediante o emprego das funções $f_1(x_1, x_2, x_3)$, $f_2(x_1, x_2, x_3)$ e $f_3(x_1, x_2, x_3)$, reescritas na forma

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dN} &= f_1(x_1, x_2, x_3) , \\
 \frac{dx_2}{dN} &= f_2(x_1, x_2, x_3) , \\
 \frac{dx_3}{dN} &= f_3(x_1, x_2, x_3) .
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

A álgebra necessária, para o cálculo dos diferentes pontos em que essas derivadas são nulas, é elementar. Portanto, apenas os resultados desse procedimento são apresentados, em conjunto com os valores, nesses distintos pontos críticos, da equação de estado efetiva e da densidade de matéria não relativística. Esses fatores auxiliam na determinação das

regiões, no espaço de parâmetros, dotadas de interesse físico (Amendola, Gannouji, Polarski & Tsujikawa 2007). Finalmente, a listagem dos pontos críticos é apresentada a seguir:

$$P_1 : (x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 2), \quad \Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = -1, \quad (2.34)$$

$$P_2 : (x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 0), \quad \Omega_m = 2, \quad w_{\text{eff}} = 1/3, \quad (2.35)$$

$$P_3 : (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0), \quad \Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = 1/3, \quad (2.36)$$

$$P_4 : (x_1, x_2, x_3) = (-4, 5, 0), \quad \Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = 1/3, \quad (2.37)$$

$$P_5 : (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{3m}{1+m}, -\frac{1+4m}{2(1+m)^2}, \frac{1+4m}{2(1+m)} \right),$$

$$\Omega_m = 1 - \frac{m(7+10m)}{2(1+m)^2}, \quad w_{\text{eff}} = -\frac{m}{(1+m)}, \quad (2.38)$$

$$P_6 : (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2(1-m)}{1+2m}, -\frac{1-4m}{m(1+2m)}, -\frac{(1-4m)(1+m)}{m(1+2m)} \right),$$

$$\Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = \frac{2-5m-6m^2}{3m(1+2m)}. \quad (2.39)$$

De acordo com as expressões para esses diferentes pontos críticos, apenas o ponto P_5 é apto a originar uma fase em que a equação de estado efetiva é igual a zero. Logo, para possuir uma fase dominada pela matéria, os modelos $f(R)$ devem ser compatíveis com a existência desse ponto. Além disso, ele deve exibir uma dinâmica análoga a um ponto de sela. Nos casos em que P_5 é um ponto fixo atrator, não há uma fase acelerada posterior. Já nas situações em que P_5 equivalente a um ponto fixo repulsor, a fase dominada pela matéria não relativística é muito instável e, para mantê-la por tempo suficiente, ajustes finos nas condições iniciais são necessários.

A existência de uma fase acelerada, com uma equação de estado efetiva que satisfaça o vínculo $w_{\text{eff}} \approx -1$, é compatível com as propriedades dos pontos P_1 e P_6 . Por conseguinte, modelos $f(R)$ devem prever a existência de ao menos um desses pontos fixos. Além disso, esse ponto deve possuir um comportamento equivalente a um atrator dinâmico. Em princípio, modelos cuja fase acelerada é transitória, prevendo alterações futuras na equação de estado efetiva, não podem ser descartados pelas observações. No entanto essa possibilidade

é desconsiderada por simplicidade.

Além de serem compatíveis com a existência de uma fase transiente dominada pela matéria não relativística, acompanhada, em seguida, por um período acelerado, as teorias $f(R)$ também devem permitir a conexão dinâmica entre essas duas etapas. Em particular, o modelo $f(R) = R - \alpha R_0^2/R$, proposto em Carroll et al. (2004), contém os pontos críticos necessários, mas esses são desconexos. Assim, não é possível encontrar uma solução em que a fase acelerada sucede a era dominada pela matéria não relativística. Como consequência, esse modelo não é viável (Amendola, Polarski & Tsujikawa 2007, Amendola, Gannouji, Polarski & Tsujikawa 2007).

Nas teorias $f(R)$, a maioria dos exemplos existentes na literatura não é passível de originar uma fase transitória desacelerada, dotada de uma equação de estado efetiva nula, seguida por um período acelerado (Amendola, Gannouji, Polarski & Tsujikawa 2007). Nesses casos, o sistema evolui, antes de alcançar a vizinhança do atrator final, para regiões próximas a um ponto fixo caracterizado por uma equação de estado que obedece a igualdade $w_{\text{eff}} = 1/3$. Logo, o valor desse parâmetro é modificado, de forma abrupta, de $w_{\text{eff}} = 1/3$ para $w_{\text{eff}} < -1/3$.

Para determinar a estabilidade dos pontos fixos, é necessário definir a matriz Jacobiana,

$$\begin{aligned}
 J &:= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 & -3 & -1 - x_1 \\ \frac{x_3}{m} + x_2 & \frac{x_1 M x_3^2}{m^2 x_2^2} - 2x_3 + 4 + x_1 & \frac{x_1}{m} - \frac{(x_1 x_3 M)}{x_2 m^2} - 2x_2 \\ -\frac{x_3}{m} & -\frac{x_1 x_3^2 M}{m^2 x_2^2} & 4 - \frac{x_1}{m} + x_3 \left(-4 + \frac{x_1 x_3 M}{x_2 m^2} \right) \end{bmatrix}, \quad (2.40)
 \end{aligned}$$

do sistema (2.33) e, posteriormente, calcular os autovalores desse operador em cada um desses pontos.

Na matriz acima, a função $M(r)$ é definida por meio da equação $M(r) := dm/dr$. Para o ponto fixo P_1 , o valor do parâmetro $r := x_3/x_2$ é igual a $r = -2$. Além disso, os autovalores

da matriz (2.40) são, nesse ponto, iguais a

$$\left(-3, -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{25 - 16/m|_{r=-2}}}{2} \right). \quad (2.41)$$

Na listagem (2.41), $m|_{r=-2}$ corresponde ao valor do parâmetro m , definido na equação (2.11), em $r = -2$. Por consequência, para garantir que P_1 seja um ponto fixo atrator, isto é, para que todos os autovalores expostos em (2.41) sejam menores ou iguais a zero, é indispensável o respeito ao vínculo

$$0 \leq m|_{r=-2} \leq 1. \quad (2.42)$$

No ponto fixo P_5 , o parâmetro m , reescrito como função da variável $r := Rf_R/f(R)$, adquire a forma funcional

$$m(r) = -r - 1. \quad (2.43)$$

De acordo com a expressão (2.38), o parâmetro Ω_m é igual a 1 se e somente se a função $m(r)$ é nula em P_5 . Essa sentença implica, por intermédio da expressão (2.43), a igualdade $r = -1$. A análise da estabilidade da fase dominada pela matéria não relativística necessita do cálculo dos autovalores

$$\left(3(1 + M_5), -\frac{3}{4(m_5 + 1)} \pm \frac{\sqrt{m_5(256m_5^3 + 160m_5^2 - 31m_5 - 16)}}{4m_5(m_5 + 1)} \right) \quad (2.44)$$

da matriz Jacobiana no ponto crítico P_5 . Esses foram apresentados, na igualdade acima, dependentes das incógnitas m_5 , que corresponde ao valor da função $m(r)$ em P_5 , e M_5 , que denota a derivada dm/dr avaliada nesse mesmo ponto. O limite $m_5 \ll 1$ dos autovalores expostos em (2.44) resulta na listagem

$$\left(3(1 + M_5), -\frac{3}{4} \pm \sqrt{-\frac{1}{m_5}} \right). \quad (2.45)$$

A apreciação do comportamento das expressões listadas acima requer prudência, por causa de uma aparente divergência existente, no limite $m_5 \rightarrow 0$, no segundo e no terceiro autovalores. Nas situações em que a função $m(r)$ assume valores negativos na vizinhança do ponto P_5 , os autovalores são todos números reais e, portanto, P_5 equivale a um ponto de sela. Todavia, dois autovalores da matriz jacobiana, sendo um deles positivo, divergem

nesse limite, dificultando a permanência do sistema dinâmico nessa região do espaço de parâmetros. O sistema, então, se afasta de forma rápida, uma vez alcançado a vizinhança desse ponto de sela. Nesse caso, a fase dominada pela matéria não relativística não é longa o suficiente para compatibilizar a teoria com as observações relativas à formação de estruturas em larga escala (Amendola, Gannouji, Polarski & Tsujikawa 2007).

Em contrapartida, nos casos em que $m(r)$ assume valores positivos nas imediações do ponto P_5 , o segundo e o terceiro autovalor, presentes em (2.45), são números complexos com parte real negativa. Por consequência, o sistema oscila de forma amortecida nas direções em que apontam os autovetores associados a esses autovalores. Além disso, é indispensável que o primeiro autovalor seja um número real positivo, para que a dinâmica desse ponto fixo não seja equivalente a um atrator final.

Como consequência, a existência de uma fase estável dominada pela matéria não relativística depende da satisfação de dois vínculos. Em primeiro lugar, a desigualdade $m(r \leq -1) \geq 0$ deve ser respeitada, pois ela garante, por meio da equação (2.43), a existência do limite superior $m_5(r \rightarrow -1) \rightarrow 0^+$. Em segundo lugar, o valor da derivada da função $m(r)$, com respeito ao parâmetro r , no ponto P_5 deve ser maior que $M(r \leq -1) \geq -1$.

Concluído o estudo dos pontos críticos P_1 e P_5 , as condições necessárias para que o ponto P_6 origine uma fase acelerada são enunciadas. Nesse caso, também é imposta a relação $w_{\text{eff}} \approx -1$ para a equação de estado efetiva. Em primeiro lugar, os parâmetros r e m também satisfazem, nesse ponto, a relação (2.43). Em segundo lugar, os autovalores da matriz jacobiana são iguais a

$$\left(4 + \frac{1}{m_6}, \frac{2 - 3m_6 - 8m_6^2}{m_6(1 + 2m_6)}, -\frac{2(m_6^2 - 1)(1 + M_6)}{m_6(1 + 2m_6)} \right). \quad (2.46)$$

Dado que uma fase é acelerada se e somente se a desigualdade $w_{\text{eff}} < -1/3$ é satisfeita, é necessário ajustar o valor dos parâmetros m_6 e M_6 para incluir o valor da equação de estado em P_6 nesse intervalo. Resultados numéricos, apresentados nas figuras 2.2 e 2.3, demonstram que esse ponto crítico corresponde a uma fase acelerada se e somente se um dos vínculos

$$m_6 < \frac{-(1 + \sqrt{3})}{2}, \quad -\frac{1}{2} < m_6 < 0, \quad m_6 > \frac{(\sqrt{3} - 1)}{2} \quad (2.47)$$

é respeitado.

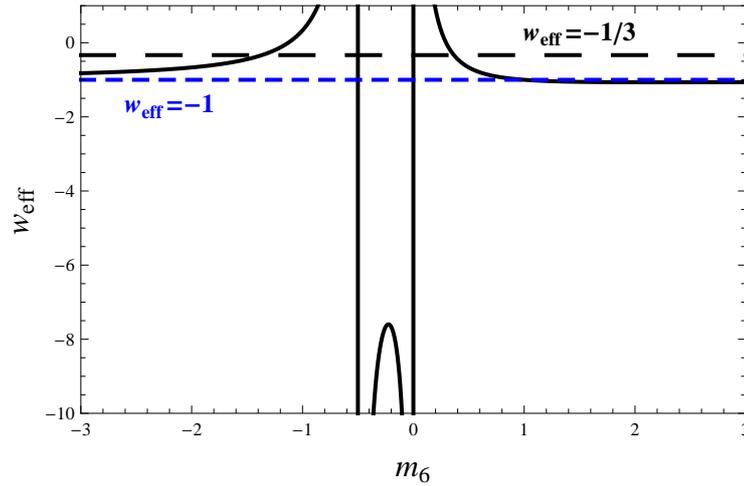


Figura 2.2: Na figura acima, a variação, no ponto crítico P_6 , da equação de estado efetiva em função do valor do parâmetro m_6 , é apresentada. A linha preta, horizontal e tracejada define o limite entre um comportamento acelerado e um desacelerado do fator de escala. Já a linha azul, horizontal e tracejada define a fronteira entre uma expansão acelerada não singular ($w_{\text{eff}} > -1$) e uma expansão acelerada do tipo *phantom* ($w_{\text{eff}} < -1$).

Em terceiro lugar, a equação de estado efetiva tende, no limite $m_6 \rightarrow \pm\infty$, a $w_{\text{eff}} = -1$. Por último, os autovalores expostos em (2.46) tendem, nesse mesmo limite, a: $(-4, -4, 1 + M_6)$. Portanto, P_6 é um ponto fixo atrator se e somente se a desigualdade $M_6 > -1$ é satisfeita. Nessa circunstância, uma fase acelerada, compatível com a dinâmica prevista pelo modelo Λ CDM, é originada.

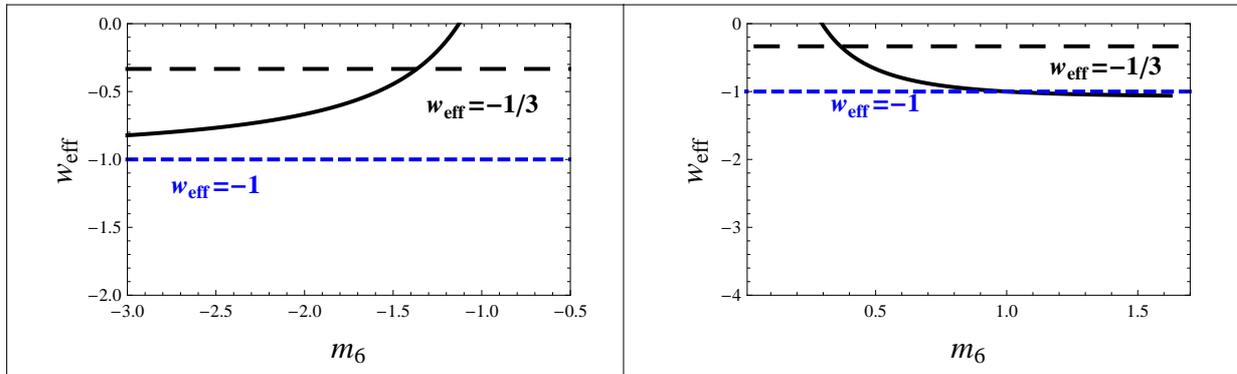


Figura 2.3: Na figura acima, a alteração, no ponto crítico P_6 , da equação de estado efetiva em função do valor do fator m_6 , é apresentada. O intervalo $[-0.5, 0]$ é omitido para facilitar a visualização. A linha preta, horizontal e tracejada define o limite entre um comportamento acelerado e desacelerado do fator de escala. Já a linha azul, horizontal e tracejada define a fronteira entre uma expansão acelerada não singular ($w_{\text{eff}} > -1$) e uma expansão acelerada do tipo *phantom* ($w_{\text{eff}} < -1$).

A investigação a respeito da estabilidade do ponto fixo P_6 é subdividida em cinco casos

distintos. Para simplificar a exposição dos resultados contidos na listagem abaixo, a figura 2.4 exibe os diferentes autovalores da matriz jacobiana como função dos parâmetros m_6 e M_6 . Esses autovalores são nomeados, na ordem em que são apresentadas na equação (2.46), λ_1 , λ_2 e λ_3 . Além disso, nessa mesma listagem, os valores previstos para a equação de estado efetiva também são apresentados.

- | | | |
|--|---|---|
| (1) $M_6 > -1$ e $m_6 < \frac{-(1+\sqrt{3})}{2}$ | → | Ponto fixo estável e $w_{\text{eff}} > -1$, |
| (2) $M_6 > -1$ e $-\frac{1}{2} < m_6 < 0$ | → | Ponto fixo estável e $w_{\text{eff}} < -1$ (phantom), |
| (3) $M_6 > -1$ e $m_6 \geq 1$ | → | Ponto fixo estável e $w_{\text{eff}} < -1$ (phantom), |
| (4) $M_6 < -1$ e $(\sqrt{3}-1)/2 < m_6 < 1$ | → | Ponto fixo estável e $w_{\text{eff}} > -1$, |
| (5) Demais casos | → | Ponto fixo instável. |
- (2.48)

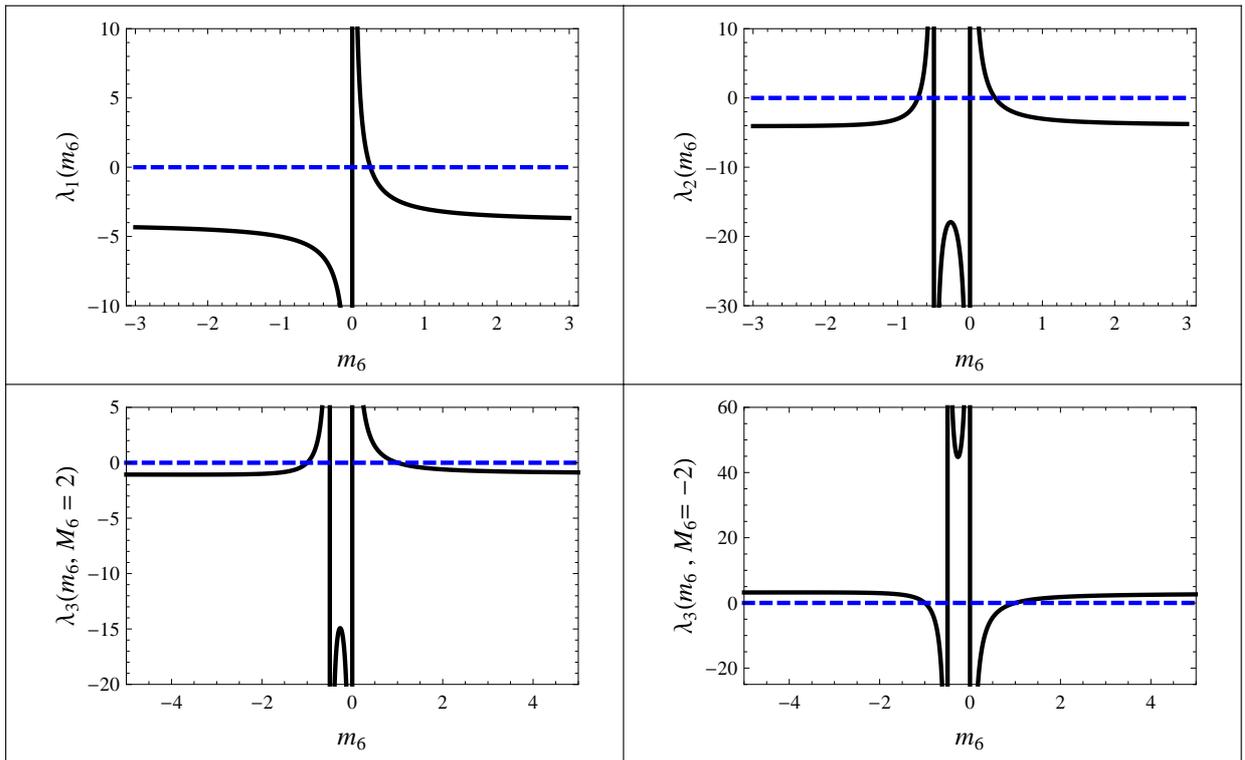


Figura 2.4: Da esquerda para direita, a variação dos autovalores λ_1 e λ_2 , em função da variável m_6 , é, na linha superior, exibido. Já na linha inferior é apresentado a variação, em P_6 , do autovalor λ_3 em função do fator m_6 , pressupondo $M_6 = 2$ e $M_6 = -2$.

Conforme mencionado, a análise dos pontos críticos não considerou a existência de radiação, pressupondo, como consequência, a igualdade $x_4 = 0$. Apesar dessa hipótese ser bem

motivada do ponto de vista físico, é importante investigar as mudanças que a presença dessa componente causa no sistema dinâmico. Dois novos pontos críticos, cujas propriedades são expostas na listagem

$$P_7 : (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 1), \quad \Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = 1/3, \quad (2.49)$$

$$P_8 : (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{4m}{1+m}, -\frac{2m}{(1+m)^2}, \frac{2m}{1+m}, \frac{1-2m-5m^2}{(1+m)^2} \right),$$

$$\Omega_m = 0, \quad w_{\text{eff}} = -\frac{1-3m}{(1+3m)} \quad (2.50)$$

devem ser considerados (Amendola, Gannouji, Polarski & Tsujikawa 2007).

O primeiro ponto fixo, denominado P_7 , equivale a uma fase dominada pela radiação. Em compensação, o segundo ponto, nomeado P_8 , origina essa fase apenas no limite $m_8 \rightarrow 0$, em que m_8 é igual ao valor da função $m(r)$, calculada nesse ponto. Nos casos em que m_8 é diferente de zero, tanto a radiação quanto as modificações introduzidas nas equações de campo, pelas teorias $f(R)$, reunidas na variável Ω_{EE} , são relevantes para a determinação da evolução temporal do fator de escala.

Os pontos críticos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6 não são alterados na presença de uma componente Ω_{rad} não nula. A demonstração dessa afirmação depende da investigação dos autovalores da matriz jacobiana,

$$J_{\text{rad}} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 & -3 & -1 - x_1 & 1 \\ \frac{x_3}{m} + x_2 & \frac{x_1 M x_3^2}{m^2 x_2^2} - 2x_3 + 4 + x_1 & \frac{x_1}{m} - \frac{(x_1 x_3 M)}{x_2 m^2} - 2x_2 & 0 \\ -\frac{x_3}{m} & -\frac{x_1 x_3^2 M}{m^2 x_2^2} & 4 - \frac{x_1}{m} + x_3 \left(-4 + \frac{x_1 x_3 M}{x_2 m^2} \right) & 0 \\ x_4 & 0 & -2x_4 & -2x_3 + x_1 \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

intitulada J_{rad} , das equações (2.9), (2.10), (2.12) e (2.13).

O determinante de $J_{\text{rad}} - \lambda I$ é igual a $(\lambda - 2x_3 + x_1) \det[J - \lambda I]$, em que I é a matriz identidade. Como consequência, os autovalores da matriz (2.40) também são autovalores do jacobiano (2.51). Assim, a dinâmica dos diferentes pontos fixos depende apenas do módulo e do sinal do quarto autovalor, denominado λ_4 . No ponto P_1 , ele é igual a $\lambda_4 = -4$ e, por conseguinte, a presença de radiação não impõe qualquer restrição adicional.

No ponto P_5 , esse autovalor é, no limite $m_5 \rightarrow 0$, igual a $\lambda_4 \rightarrow 1/2$, não invalidando, por

consequência, as conclusões enunciadas no caso $x_4 = 0$. Por último, a inclusão da radiação no ponto P_6 não impõe vínculos adicionais nos intervalos em que este ponto fixo é estável, conforme verificado na figura 2.5.

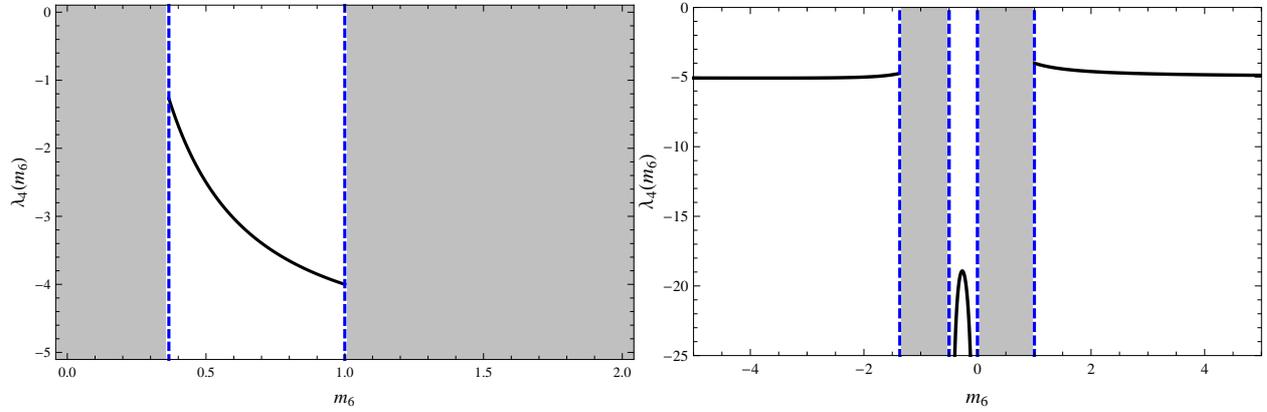


Figura 2.5: A figura à esquerda apresenta a variação do autovalor λ_4 , calculado no ponto P_6 , como função do parâmetro m_6 , para o caso $M_6 < -1$. Os intervalos em que esse ponto não equivale a um atrator são desconsiderados, para facilitar a visualização. A figura à direita exibe esse autovalor, como função do fator m_6 , para o caso $M_6 < 1$.

2.3 Exemplos

A elaboração teórica apresentada na seção anterior permite eliminar algumas propostas de modelos existentes na literatura. Alguns desses exemplos são incapazes, por exemplo, de prever uma fase dominada pela matéria não relativística longa o suficiente para possibilitar a formação de estruturas. Isso provoca a existência de um período com duração excessiva em que equação de estado efetiva assume valores próximos a um terço e um decaimento dos potenciais perturbativos com comprimentos de onda inferiores ao raio de Hubble. Nesse caso, o tamanho das estruturas cresce, como função do fator de escala, de forma logarítmica, e o espectro de potência da Radiação Cósmica de Fundo é perturbado de forma significativa, por meio do efeito Sachs Wolfe integrado. Para ilustrar as possíveis aplicações dessa análise, nesta seção dois exemplos particulares são empregados. O primeiro a ser estudado é o modelo

$$f(R) = R - \alpha \left(\frac{R_0^2}{R} \right) \quad (2.52)$$

é considerado, no caso $\alpha > 0$ (Carroll et al. 2004).

Nesse exemplo, a função $m(r)$, obtida por meio da equação (2.14), é igual a

$$\begin{aligned} r &= -\frac{Rf_R}{f(R)} \\ &= -\frac{R(1 + \alpha y^2)}{R - \alpha R_0 y}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

No desdobramento acima, o parâmetro y é igual à razão $y := R/R_0$. Mediante um rearranjo algébrico, esse termo é reescrito como função do parâmetro r . Portanto, por meio da definição (2.11) e da expressão $y^2 = \alpha(r - 1)/(r + 1)$, $m(r)$ é igual a

$$\begin{aligned} m(r) &= \frac{Rf_{RR}}{f_R} \\ &= \frac{-3\alpha y^{-2}}{1 + \alpha y^{-2}} \\ &= -\frac{1 + r}{r}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

De acordo com a expressão acima, o limite $r \rightarrow -1$ da função $m(r)$ é igual a zero, indicando a compatibilidade das características presentes no ponto fixo P_5 com a existência

de uma fase dominada por matéria não relativística. Além disso, o valor $r = 0$ é raiz da equação (2.43), demonstrando a viabilidade desse ponto crítico, e a derivada $M(r) = dm/dr$ tende, neste mesmo limite, a $M = 1$. O comportamento das variáveis m_5 e M_5 implica que P_5 é um ponto de sela, afirmação verificada na figura 2.6.

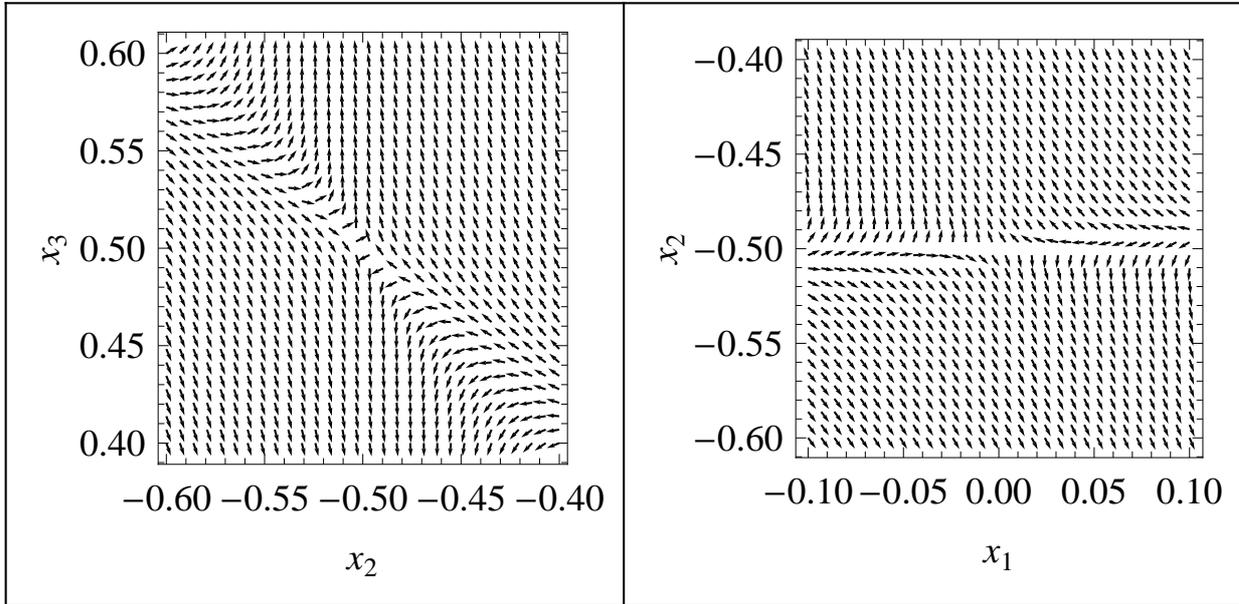


Figura 2.6: A figura a esquerda apresenta o gráfico vetorial das derivadas dx_2/dN e dx_3/dN , como funções das variáveis x_1, x_2, x_3 e x_4 , previsto pelo modelo $f(R) = R - \alpha (R_0^2/R)$. As igualdades $\alpha = 1$, $x_1 = 0$ e $x_4 = 0$ são pressupostas e o intervalo de variação dos parâmetros x_2 e x_3 corresponde à vizinhança do ponto fixo P_5 . Em contrapartida, a figura a direita exibe o gráfico vetorial das derivadas dx_1/dN e dx_2/dN , pressupondo as igualdades $x_3 = 1/2$ e $x_4 = 0$.

Entretanto, a desigualdade $\alpha(r-1)/(r+1) > 0$, satisfeita por esse parâmetro, indica que os valores permitidos para a variável r estão contidos no intervalo $(-\infty, -1) \cup [1, \infty)$. Logo, $r \rightarrow -1$ equivale a um limite superior e, por conseguinte, a expressão

$$\lim_{r \rightarrow -1} m(r) = 0^- \quad (2.55)$$

é verdadeira. Por intermédio da equação (2.45), é possível concluir que o autovalor λ_3 é um número real e divergente no limite (2.55). A era dominada pela matéria não relativística é, portanto, instável, exigindo ajustes finos nas condições iniciais para manter a duração desse período por um tempo suficientemente longo. Em compensação, o ponto P_1 não é um ponto atrator, conforme verificado na figura 2.7, pois o limite $r \rightarrow -2$ da função $m(r)$ é igual a

$-1/2$, não pertencendo ao intervalo exibido em (2.42).

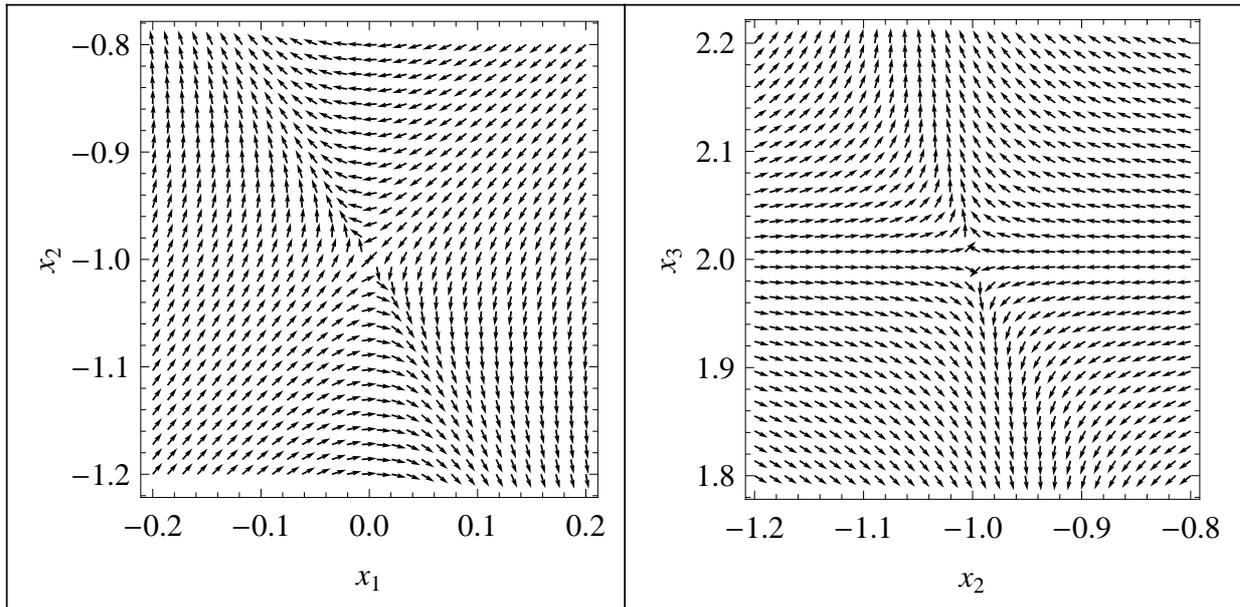


Figura 2.7: A figura a esquerda apresenta o gráfico vetorial das derivadas dx_1/dN e dx_2/dN , como funções das variáveis x_1, x_2, x_3 e x_4 , previsto pelo modelo $f(R) = R - \alpha (R_0^2/R)$. As igualdades $\alpha = 1$, $x_3 = 2$ e $x_4 = 0$ são pressupostas e o intervalo de variação dos parâmetros x_1 e x_2 corresponde à vizinhança do ponto fixo P_1 . Em contrapartida, a figura a direita exibe o gráfico vetorial das derivadas dx_2/dN e dx_3/dN , pressupondo as igualdades $x_1 = 0$ e $x_4 = 0$.

Por fim, o ponto fixo P_6 é um atrator, conforme verificado na figura 2.8. Nesse caso, $r = 1$ é raiz da equação (2.43). Como consequência, a derivada da função $m(r)$ é, em P_6 , igual a $M = 1$ e, além disso, a função $m(r)$ é igual a $m = -2$. Esse ponto fixo origina, por consequência, uma fase acelerada.

Concluindo a análise do caso particular (2.52), é possível caracterizar a cosmologia prevista por esse modelo como munida de uma fase dominada pela matéria não relativística muito instável. Portanto, entre a fase dominada pela radiação e o período acelerado, o universo é regido, em conjunto, pela matéria não relativística e pelas as modificações induzidas pela teoria $f(R)$, conforme exemplificado na figura 2.9 (Amendola, Gannouji, Polarski & Tsujikawa 2007, Amendola, Polarski & Tsujikawa 2007).

O segundo caso analisado é o modelo

$$f(R) = R - \alpha R_0 \ln \left(1 + \frac{R}{R_0} \right), \quad (2.56)$$

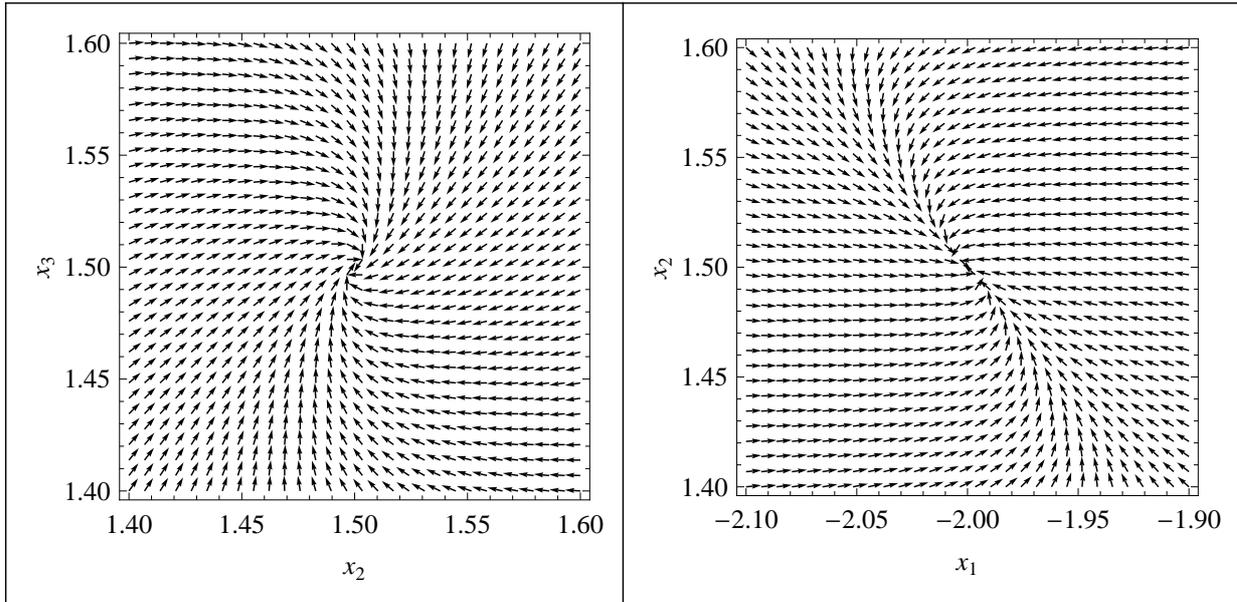


Figura 2.8: A figura a esquerda apresenta o gráfico vetorial das derivadas dx_2/dN e dx_3/dN , como funções das variáveis x_1 , x_2 , x_3 e x_4 , previsto pelo modelo $f(R) = R - \alpha (R_0^2/R)$. As igualdades $\alpha = 1$, $x_1 = -2$ e $x_4 = 0$ são pressupostas e o intervalo de variação dos parâmetros x_2 e x_3 corresponde à vizinhança do ponto fixo P_6 . Em contrapartida, a figura a direita exhibe o gráfico vetorial das derivadas dx_1/dN e dx_2/dN , pressupondo as igualdades $x_3 = 3/2$ e $x_4 = 0$.

com $\alpha > 0$ (Miranda et al. 2009b). Para determinar a dinâmica dos pontos fixos, é necessário, primeiramente, calcular as funções $m(r)$ e $M(r)$, o que é feito de forma paramétrica, a partir das expressões

$$m(R) = \frac{\alpha(R/R_0)}{\left(1 + \frac{R}{R_0}\right)^2} \left(1 - \frac{\alpha}{\left(1 + \frac{R}{R_0}\right)}\right)^{-1}, \quad (2.57)$$

$$r(R) = R \left(1 - \frac{\alpha}{1 + \frac{R}{R_0}}\right) \left(R - \alpha R_0 \ln \left(1 + \frac{R}{R_0}\right)\right)^{-1}, \quad (2.58)$$

$$M(R) = \frac{-(R^2 + (-1 + \alpha)R_0^2) \left(R - \alpha R_0 \ln \left(1 + \frac{R}{R_0}\right)\right)^2}{(R + R_0 - \alpha R_0)^2 \left(-R(2R + R_0 - \alpha R_0) + (R^2 + 2RR_0 - (-1 + \alpha)R_0^2) \ln \left(1 + \frac{R}{R_0}\right)\right)}. \quad (2.59)$$

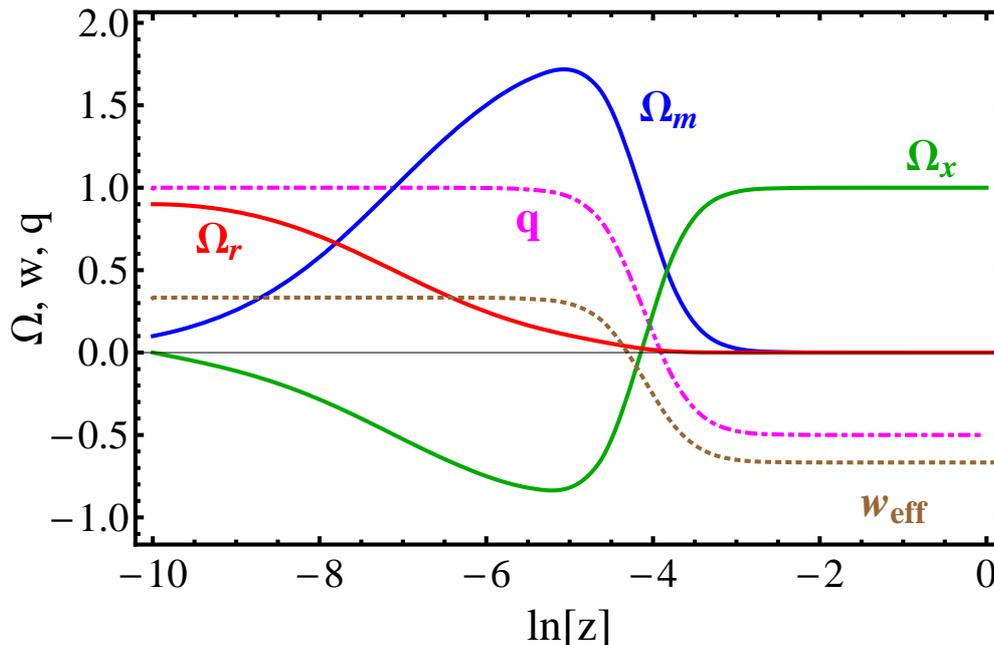


Figura 2.9: Cosmologia prevista pelo $f(R) = R - \alpha(R_0^2/R)$, supondo $\alpha = 1$. As condições iniciais, postuladas em $N = -10$, são: $x_4 = 0.9$, $x_2 = -5 \times 10^{-4}$, $x_3 = -(1 + 1 \times 10^{-14})x_2$ e $x_1 + x_2 + x_3 = 2 \times 10^{-19}$. O parâmetro Ω_{EE} corresponde a razão entre a densidade ρ_{EE} e a densidade de energia total contida no universo sendo, portanto, igual $\kappa^2 \rho_{\text{EE}}/3H^2$. O fator, por sua vez, equivale a $q = -(d^2 a(t)/dt^2) a(t) (da(t)/dt)^{-2}$ (parâmetro de aceleração). A evolução do sistema, de uma maneira geral, não depende do valor de R_0 . Essa quantidade, no entanto, é utilizada para precisar o valor da constante de Hubble em $z = 0$.

Conforme mencionado, a estabilidade do ponto fixo P_1 depende, de modo necessário, da validade do vínculo (2.42). Para $\alpha \geq 1$, ele é satisfeito, conforme exemplificado na figura 2.10. No caso particular em que $\alpha = 0.6$, o valor da função $m(r)$ em $r = -2$ é, de modo aproximado, $1/2$, valor este bem abaixo do limite superior $m = 1$. Entretanto, para $0 < \alpha < 1$, o ponto $r = -1$ não pertence ao domínio acessível ao parâmetro r , conforme verificado na figura 2.11 e, portanto, a fase acelerada atratora, caso exista, é produzida pelo ponto P_6 .

Para determinar as características dos pontos P_5 e P_6 , é indispensável solucionar a equação (2.43). Para $\alpha > 1$, a única raiz existente é $R = 0$, conforme visto no gráfico 2.12a. No limite $R/R_0 \rightarrow \infty$, a expressão (2.43) também tende a zero, e essas duas soluções equivalem a $r = -1$.

De fato, é importante que a quantidade r tenda a -1 para grandes valores da razão R/R_0 , pois é nesse intervalo que a fase dominada pela matéria não relativística é atuante. A figura

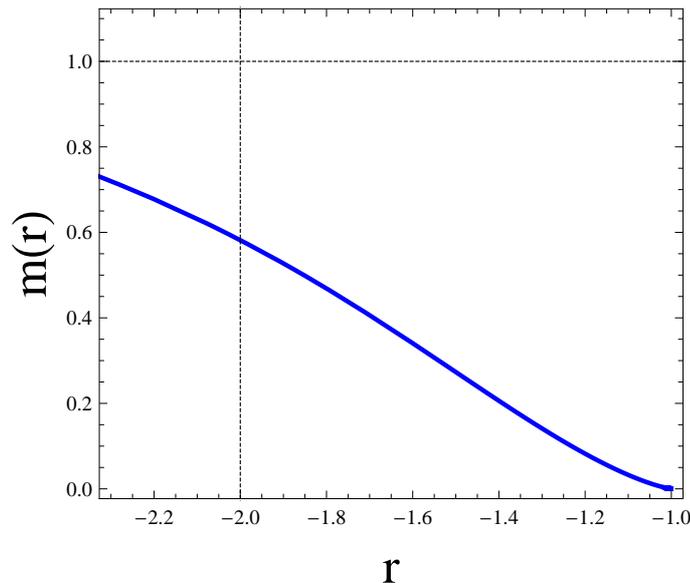


Figura 2.10: A imagem acima apresenta o gráfico da função $m(r)$ previsto pelo modelo (2.56), considerando $\alpha = 1.2$. Esse perfil é independente do parâmetro R_0 . Claramente, o limite $m(r \rightarrow -1) \rightarrow 0$ é satisfeito, o que implica na compatibilidade do ponto P_5 com as características de uma fase dominada pela matéria não relativística. Além disso o limite a desigualdade $m(r \rightarrow -2) < 1$ é satisfeita, o que implica na estabilidade do ponto P_1 , capaz de gerar uma fase acelerada em que $w_{\text{eff}} = -1$.

2.10 demonstra que a função $m(r)$ é nula em $r = -1$, o que implica na existência de uma era em que $w_{\text{eff}} = 0$. Além disso, esse gráfico, em conjunto com a imagem 2.13a, também mostra a estabilidade do ponto fixo P_5 , pois $m(r)$ é estritamente positiva nas redondezas de $r = -1$ e a derivada $M(r)$ é maior que -1 no intervalo $r \leq -1$. Por causa da ausência de raízes da igualdade (2.43), o ponto fixo P_6 não existe para $\alpha \geq 1$.

Já nas situações em que $\alpha < 1$, não só $R = 0$ soluciona a equação (2.43). Por exemplo, $R = 0.6R_0$ também é raiz dessa expressão para $\alpha = 0.9$, conforme verificado na imagem (2.12b). Esse valor para o escalar de Ricci corresponde a $r \approx -1.48$, $m(r) \approx 0.48$, $M(r) \approx -80$ e $w_{\text{eff}} \approx -0.63$. Por conseguinte, é possível afirmar a existência do ponto fixo P_6 , produtor de uma aceleração cósmica estável, de acordo com os vínculos exibidos na listagem (2.48).

Adicionalmente, as figuras 2.11 e (2.13b) demonstram que existe uma fase transiente dominada pela matéria não relativística, pois apesar da função $M(r)$ cruzar o ponto $M = -1$, tornando P_5 um atrator dinâmico, essa igualdade é satisfeita apenas para um escalar de Ricci da ordem de grandeza de $R/R_0 \sim \mathcal{O}(1)$. Logo, quando P_5 passa a se comportar como um ponto estável, o sistema já está na vizinhança de P_6 , permitindo a transição entre a fase

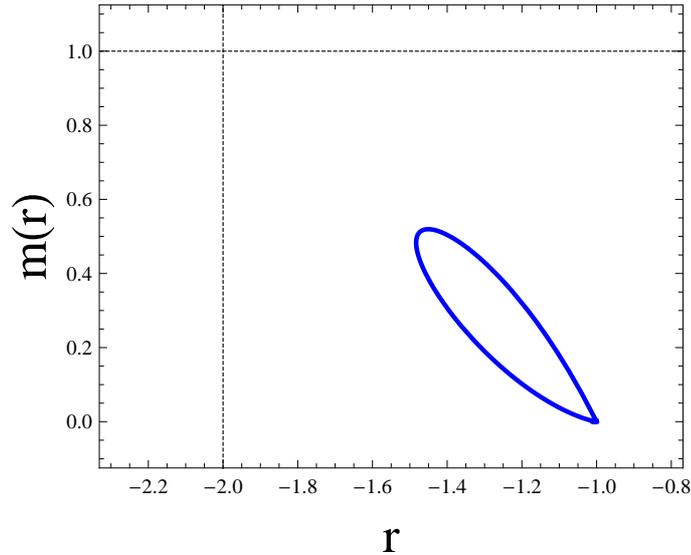


Figura 2.11: A imagem acima apresenta o gráfico da função $m(r)$ previsto pelo modelo (2.56), considerando $\alpha = 0.9$. Esse perfil é independente do parâmetro R_0 . Nesse caso, $r = -2$ não é alcançável, o que implica na inexistência do ponto fixo P_1 . Logo, para $\alpha < 1$, uma fase final acelerada só pode ser gerada pelo ponto fixo P_6 .

dominada pela matéria não relativística e a aceleração final.

Por fim, a análise dos pontos fixos permite concluir que o modelo (2.56) é capaz de gerar uma fase transiente dominada pela matéria não relativística, seguida de um atrator final acelerado, para todo intervalo positivo de valores para o parâmetro α , independente da constante R_0 . Essa quantidade, no entanto, é relevante na determinação da função de Hubble em $z = 0$ sendo, portanto, vinculado pelas observações. Para exemplificar esse comportamento, as figuras 2.14 apresentam uma solução numérica prevista para os casos $\alpha = 0.9$ e $\alpha = 2$.

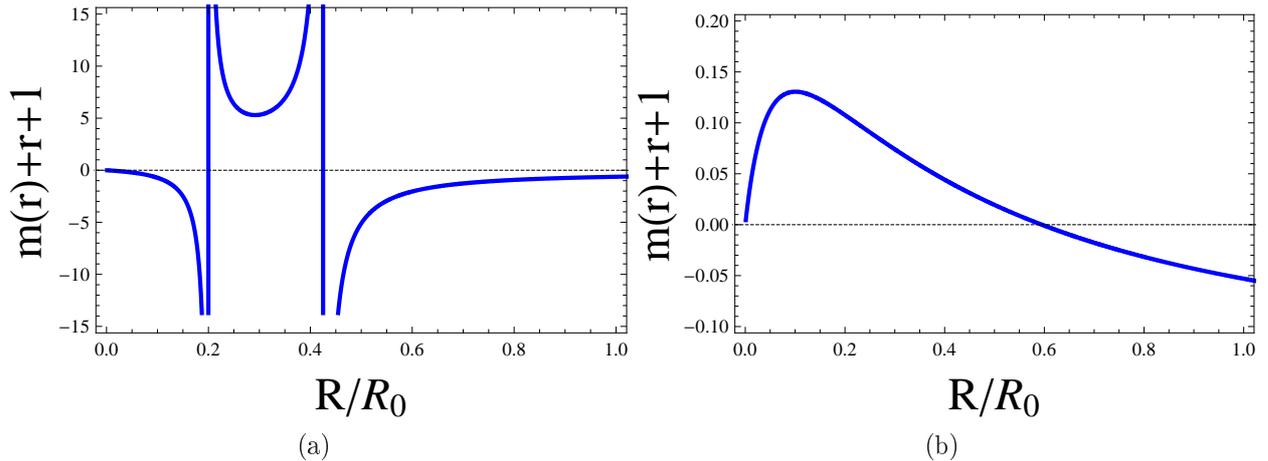


Figura 2.12: O gráfico à esquerda apresenta as raízes da equação $m(r) = -r - 1$ previstas pelo modelo (2.56), considerando $\alpha = 1.2$. Nessa situação, apenas $R = 0$ soluciona esta expressão. No entanto, no limite $R \rightarrow \infty$, a quantidade $m(r) + r + 1$ tende a zero, indicando a compatibilidade desse modelo com a existência de um ponto fixo P_5 no intervalo de valores para o escalar de Ricci característico da fase dominada pela matéria não relativística. A figura à direita, por sua vez, apresenta as raízes para o caso em que $\alpha = 0.9$. A existência de uma solução para $R/R_0 \approx 0.6$ indica a existência do ponto fixo P_6 , que é o responsável pela aceleração final do universo nesse regime de valores para α .

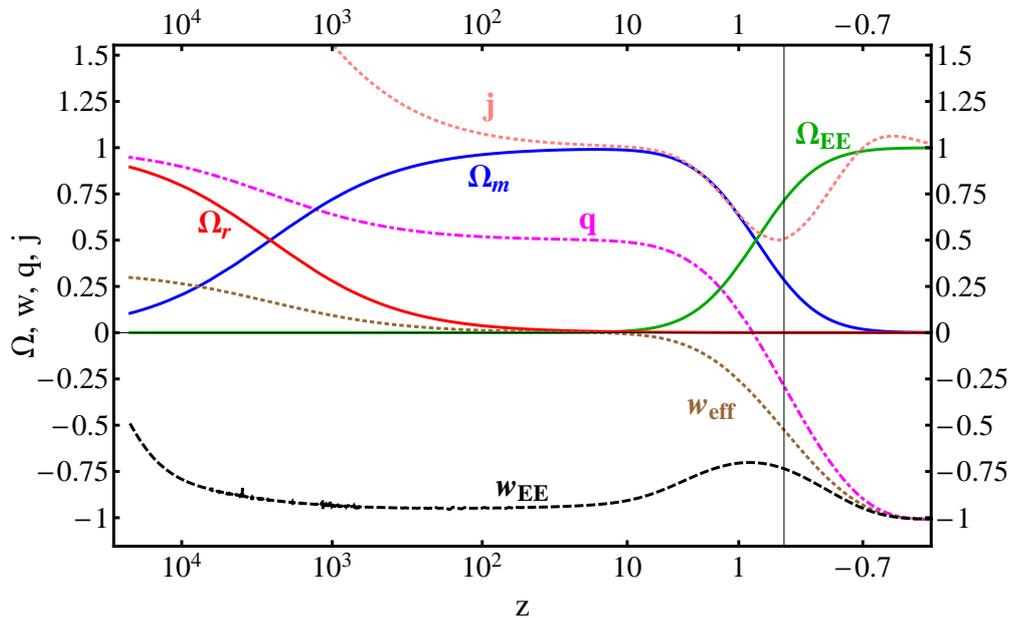


Figura 2.14: A figura acima apresenta a cosmologia prevista pelo modelo (2.56), considerando $\alpha = 2$. As condições iniciais, estipuladas em $N = -10$, são: $x_1 = -2.622 \times 10^{-13}$, $x_2 = -0.0524426$, $x_3/x_2 = -1 - 5 \times 10^{-12}$, $x_4 \approx 0.895$. As quantidades q , j e Ω_{EE} correspondem, respectivamente, ao parâmetros de aceleração e ao jerk e a razão entre a densidade ρ_{EE} de energia escura e a densidade de energia total contida no universo sendo, portanto, iguais a $q = - (d^2 a(t)/dt^2) a(t) (da(t)/dt)^{-2}$, a $j = (d^3 a(t)/dt^3) / (a(t)H(t))$ e a $\kappa^2 \rho_{EE}/3H^2$, em que $a(t)$ é o fator de escala. A evolução do sistema, de uma maneira geral, não depende do valor de R_0 . Esse parâmetro, no entanto, é utilizado para precisar o valor da constante de Hubble em $z = 0$. Fonte: Miranda et al. (2009b)

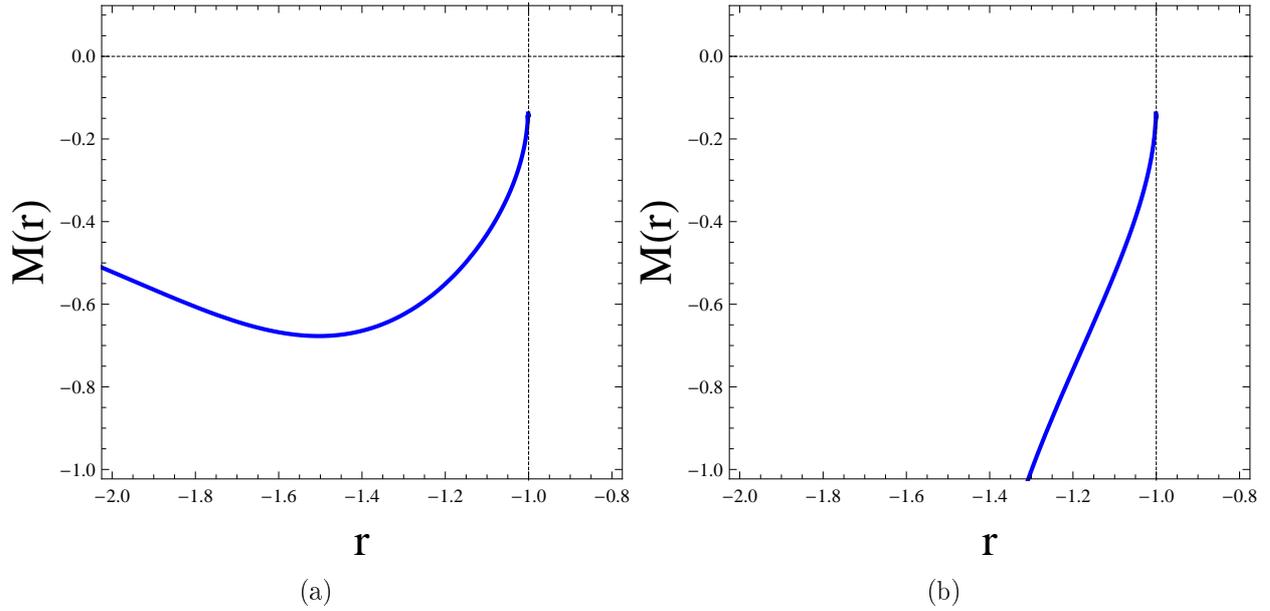


Figura 2.13: O gráfico à esquerda apresenta a função $M(r)$ prevista pelo modelo (2.56), considerando $\alpha = 1.2$. Nessa situação, o vínculo $M(r \leq -1) \geq -1$, necessário para tornar P_5 um ponto de sela, é satisfeito. Já a figura à direita apresenta essa função no caso em que $\alpha = 0.9$. Para $\alpha < 1$, a função $M(r)$ pode adquirir valores menores que -1 para $R/R_0 \sim \mathcal{O}(1)$.

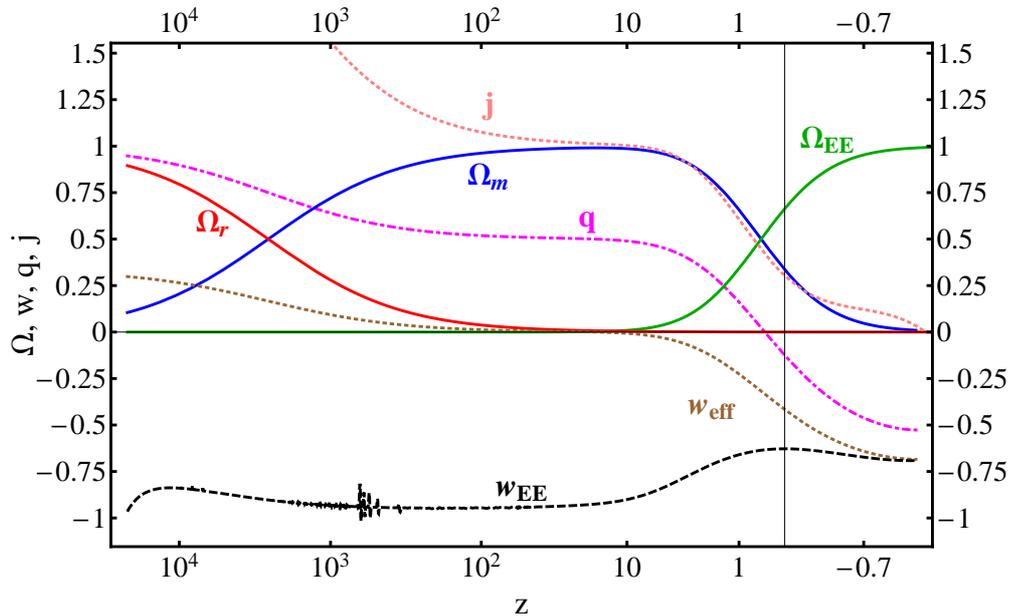


Figura 2.15: A figura acima apresenta a cosmologia prevista pelo modelo (2.56), considerando $\alpha = 0.9$. As condições iniciais, estipuladas em $N = -10$, são: $x_1 = -2.622 \times 10^{-13}$, $x_2 = -0.0524426$, $x_3/x_2 = -1 - 5 \times 10^{-12}$, $x_4 \approx 0.895$. As quantidades q , j e Ω_{EE} correspondem, respectivamente, ao parâmetro de aceleração, ao jerk e a razão entre a densidade ρ_{EE} de energia escura e a densidade de energia total contida no universo sendo, portanto, iguais a $q = -(d^2a(t)/dt^2) a(t) (da(t)/dt)^{-2}$, a $j = (d^3a(t)/dt^3) / (a(t)H(t))$ e a $\kappa^2 \rho_{EE} / 3H^2$, em que $a(t)$ é o fator de escala. A evolução do sistema, de uma maneira geral, não depende do valor de R_0 . Esse parâmetro, no entanto, é utilizado para precisar o valor da constante de Hubble em $z = 0$. Fonte: Miranda et al. (2009b)

Capítulo 3

Introdução à Estrelas Estáticas

3.1 Introdução

Neste capítulo, a dinâmica, prevista pelas teorias $f(R)$, das componentes da métrica, pressupondo-a estática e esféricamente simétrica, é analisada. As equações dinâmicas para os campos $B(r)$ e $N(r)$, definidos em (3.1), são demonstradas. A solução desse sistema, no limite de campo fraco, é determinada, desconsiderando as não linearidades presentes nessas equações. Posteriormente, estes resultados são confrontados com os testes observacionais (Chiba, Smith & Erickcek 2007, Navarro & Van Acoleyen 2007).

O carácter não linear das equações de campo é indispensável para a consonância entre as previsões das teorias $f(R)$ e as observações, obtidas no Sistema Solar. A incapacidade do método perturbativo de produzir resultados factíveis é, neste capítulo, evidenciada. Portanto, esse estudo motiva a análise do efeito Camaleão, a ser desenvolvido no próximo capítulo. Nas igualdades subsequentes, as coordenadas (x_0, x_1, x_2, x_3) , empregadas para designar um evento no espaço-tempo, equivalem à $(x_0 = t, x_1 = r, x_2 = \theta, x_3 = \phi)$. Além disso, o elemento de linha, nesse espaço-tempo, é igual a

$$ds^2 = -N(r)dt^2 + \frac{1}{B(r)}dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) . \quad (3.1)$$

Por intermédio das definições

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\nu\delta}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\delta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\delta} \right) , \quad (3.2)$$

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}, \quad (3.3)$$

os símbolos de Christoffel e o tensor de Riemann, em função dos campos $N(r)$ e $B(r)$, são calculados. À exceção das componentes

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{01} &= \frac{1}{2}g^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right) & \Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2}g^{11} \left(2 \frac{\partial g_{01}}{\partial t} - \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right) \\ &= \frac{-N(r)}{2} \left(-\frac{dN(r)}{dr} \right) & &= \frac{B(r)}{2} \left(\frac{dN(r)}{dr} \right) \\ &= \frac{N(r)}{2} \frac{dN(r)}{dr}, & &= \frac{B(r)}{2} \frac{dN(r)}{dr}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}g^{11} \left(2 \frac{\partial g_{11}}{\partial r} - \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \right) & \Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}g^{11} \left(2 \frac{\partial g_{21}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right) \\ &= \frac{B(r)}{2} \left(-\frac{1}{B(r)^2} \frac{dB(r)}{dr} \right) & &= -\frac{B(r)}{2} \frac{dr^2}{dr} \\ &= -\frac{1}{2B(r)} \frac{dB(r)}{dr}, & &= -rB(r), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{33} &= \frac{1}{2}g^{11} \left(2 \frac{\partial g_{31}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right) & \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right) \\ &= \frac{B(r)}{2} \left(-\frac{d(r^2(\sin \theta)^2)}{dr} \right) & &= \frac{1}{2r^2} \frac{dr^2}{dr} \\ &= -B(r)r(\sin \theta)^2, & &= \frac{1}{r}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^2_{33} &= \frac{1}{2}g^{22} \left(2 \frac{\partial g_{32}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right) & \Gamma^3_{13} &= \frac{1}{2}g^{33} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right) \\ &= \frac{1}{2r^2} \left(-\frac{d(r^2(\sin \theta)^2)}{d\theta} \right) & &= \frac{1}{2r^2(\sin \theta)^2} \frac{d(r^2(\sin \theta)^2)}{dr} \\ &= -\sin \theta \cos \theta, & &= \frac{1}{r}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{23} &= \frac{1}{2} g^{33} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right) \\
&= \frac{1}{2r^2(\sin \theta)^2} \left(\frac{d(r^2(\sin \theta)^2)}{d\theta} \right) \\
&= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \tag{3.8}
\end{aligned}$$

os símbolos de Christoffel são iguais a zero.

Por intermédio das equações apresentadas acima, o tensor de Ricci é obtido. A componente 00 desse tensor é igual a

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{\partial \Gamma^1_{00}}{\partial r} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha 1} \Gamma^1_{00} - \Gamma^{\alpha}_{01} \Gamma^1_{\alpha 0} \\
&= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B(r)}{2} \frac{dN(r)}{dr} \right) + \frac{B(r)}{2} \frac{dN(r)}{dr} \left(\frac{1}{2N(r)} \frac{dN(r)}{dr} - \frac{1}{2B(r)} \frac{dB(r)}{dr} + \frac{2}{r} \right) - \\
&\quad - \frac{B(r)}{2N(r)} \left(\frac{dN(r)}{dr} \right)^2 \\
&= \frac{B(r)}{2} \frac{d^2 N(r)}{dr^2} + \frac{1}{4} \frac{dB(r)}{dr} \frac{dN(r)}{dr} - \frac{1}{4} \frac{B(r)}{N(r)} \left(\frac{dN(r)}{dr} \right)^2 + \frac{B(r)}{r} \frac{dN(r)}{dr}. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Em contrapartida, as componentes 11, 22 e 33, do tensor de Ricci são expressas nas igualdades

$$R_{11} = -\frac{1}{rB(r)} \frac{dB(r)}{dr} + \frac{1}{4N(r)^2} \left(\frac{dN(r)}{dr} \right)^2 - \frac{1}{2N(r)} \frac{d^2 N(r)}{dr^2} - \frac{1}{4N(r)B(r)} \frac{dB(r)}{dr} \frac{dN(r)}{dr}, \tag{3.10}$$

$$R_{22} = -\frac{r}{2} \frac{dB(r)}{dr} + 1 - B(r) - \frac{rB(r)}{2N(r)} \frac{dN(r)}{dr}, \tag{3.11}$$

$$R_{33} = (\sin \theta)^2 R_{22}. \tag{3.12}$$

Todos os elementos não diagonais do tensor de Ricci são nulos. Mediante a utilização desses resultados, as equações de campo são enunciadas. Essa demonstração é apresentada a partir do cálculo da componente 00. Para a completa exibição dessa expressão, o terceiro e o quarto termos presentes nas equações (1.14) são, na sequência, calculados. Eles são iguais

a

$$\begin{aligned}
 \nabla_0(\nabla_0 f_R) &= \frac{\partial^2 f_R}{\partial t^2} - \Gamma^\alpha{}_{00} \frac{\partial f_R}{\partial x^\alpha} \\
 &= -\Gamma^1{}_{00} \frac{df_R}{dr} \\
 &= -\frac{B(r)}{2} \frac{dN(r)}{dr} \frac{df_R}{dr} ,
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla^\theta(\nabla_\theta f_R) &= \frac{d^2 f_R}{dr^2} - g^{\mu\nu} \Gamma^1{}_{\mu\nu} \frac{df_R}{dr} \\
 &= \frac{d^2 f_R}{dr^2} + \frac{df_R}{dr} \left(\frac{B(r)}{2N(r)} \frac{dN(r)}{dr} + \frac{1}{2} \frac{dB(r)}{dr} + \frac{2B(r)}{r} \right) .
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Os resultados, apresentados nas igualdades (3.9), (3.13) e (3.14), permitem enunciar a expressão

$$\begin{aligned}
 f_R \left[\frac{B(r)}{2} \frac{d^2 N(r)}{dr^2} + \frac{1}{4} \frac{dB(r)}{dr} \frac{dN(r)}{dr} - \frac{1}{4} \frac{B(r)}{N(r)} \left(\frac{dN(r)}{dr} \right)^2 + \frac{B(r)}{r} \frac{dN(r)}{dr} \right] \\
 - N(r) \frac{d^2 f_R}{dr^2} - N(r) \frac{df_R}{dr} \left(+ \frac{1}{2} \frac{dB(r)}{dr} + \frac{2B(r)}{r} \right) + \frac{f(R)}{2N(r)} = \kappa^2 T_{00} ,
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

equivalente à componente 00 das equações de campo.

A demonstração das equações de campo remanescentes também é exibida mediante a obtenção das derivadas covariantes do campo f_R , com respeito às diferentes coordenadas. Esses termos são iguais a

$$\begin{aligned}
 \nabla_1(\nabla_1 f_R) &= \frac{d^2 f_R}{dr^2} - \Gamma^1{}_{11} \frac{df_R}{dr} \\
 &= \frac{d^2 f_R}{dr^2} + \frac{df_R}{dr} \left(\frac{1}{2B(r)} \frac{dB(r)}{dr} \right) ,
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_2(\nabla_2 f_R) &= \frac{d^2 f_R}{d\theta^2} - \Gamma^1{}_{22} \frac{df_R}{dr} \\
 &= \frac{df_R}{dr} (rB(r)) ,
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\nabla_3(\nabla_3 f_R) &= \frac{d^2 f_R}{d\phi^2} - \Gamma^1{}_{33} \frac{df_R}{dr} \\ &= \frac{df_R}{dr} (rB(r)(\sin\theta)^2) .\end{aligned}\quad (3.18)$$

Por fim, as componentes 11, 22 e 33 das equações de campo, são expressas a seguir, nessa respectiva ordenação:

$$\begin{aligned}f_R \left[-\frac{1}{rB(r)} \frac{dB(r)}{dr} + \frac{1}{4N(r)^2} \left(\frac{dN(r)}{dr} \right)^2 - \frac{1}{2N(r)} \frac{d^2 N(r)}{dr^2} - \frac{1}{4N(r)B(r)} \frac{dB(r)}{dr} \frac{dN(r)}{dr} \right] \\ + \frac{df_R}{dr} \left(\frac{1}{2N(r)} \frac{dN(r)}{dr} + \frac{2}{r} \right) - \frac{f(R)}{2B(r)} = \kappa^2 T_{rr} ,\end{aligned}\quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}f_R \left(-\frac{r}{2} \frac{dB(r)}{dr} + 1 - B(r) - \frac{rB(r)}{2N(r)} \frac{dN(r)}{dr} \right) + r^2 \frac{d^2 f_R}{dr^2} \\ + r^2 \frac{df_R}{dr} \left(+\frac{B(r)}{2N(r)} \frac{dN(r)}{dr} + \frac{1}{2} \frac{dB(r)}{dr} + \frac{B(r)}{r} \right) - \frac{r^2 f(R)}{2} = 0 ,\end{aligned}\quad (3.20)$$

$$(\sin\theta)^2 \left[f_R R_{22} - \frac{df_R}{dr} (rB(r)) + r^2 (\nabla_\theta \nabla^\theta f_R) - \frac{r^2 f(R)}{2} \right] = 0 .\quad (3.21)$$

A expressão (3.21) não adiciona qualquer informação, pois é equivalente à equação (3.20). Assim, ela é desconsiderada. Além disso, todas as componentes não diagonais das equações (1.14) são nulas e, como consequência, as igualdades (3.15), (3.19) e (3.20) determinam toda a dinâmica da métrica (3.1) nas teorias $f(R)$.

As equações de campo são muito difíceis de serem solucionadas, por causa da não linearidade presente nessas expressões. Contudo, essas soluções podem ser determinadas no limite perturbativo (Chiba et al. 2007, Navarro & Van Acoleyen 2007). À primeira vista, esse procedimento pode ser considerado a maneira apropriada para obter a teoria da Relatividade Geral. De fato, nas imediações de R_{dS} , a função $f(R)$ é, aproximadamente, igual a

$$f(R) = f_0 + f_{R0}(R - R_{\text{dS}}) + \mathcal{O}(R - R_{\text{dS}})^2 .\quad (3.22)$$

Com o objetivo de simplificar a notação empregada nessa dissertação, a diferença $R - R_{\text{dS}}$ é intitulada $\epsilon R_1(r)$. A quantidade ϵ corresponde a um parâmetro adimensional, que indica a

ordem da expansão perturbativa.

Conforme será demonstrado, a análise perturbativa prediz resultados em frontal contração com os dados observacionais (Chiba et al. 2007, Navarro & Van Acoleyen 2007), indicando que o limite para a teoria da Relatividade Geral não deve ser estabelecido por esse procedimento. Essa afirmação é a motivação fundamental para o estudo do efeito Camaleão (Khoury & Weltman 2004a, Khoury & Weltman 2004b). Além da expressão (3.22), o limite perturbativo pressupõe as expansões

$$\begin{aligned} \left. \frac{df}{dR} \right|_R &= \left. \frac{df}{dR} \right|_{R=R_{\text{ds}}} + \left. \frac{d^2f}{dR^2} \right|_{R=R_{\text{ds}}} (R - R_{\text{ds}}) + \mathcal{O}(R - R_{\text{ds}})^2 \\ &= f_{R0} + f_{RR0} \epsilon R_1(r) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} N(r) &= 1 + 2\epsilon\Psi(r) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ B(r) &= 1 - 2\epsilon\Phi(r) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \epsilon\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon^2 p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

As expansões das equações de campo, governantes da dinâmica dos campos $N(r)$, $B(r)$ e f_R , são exibidas em etapas. Em primeiro lugar, é calculado o limite perturbativo da equação (3.15). Em segundo lugar, o limite da expressão (3.19) é obtido. Por último, o limite da expressão (3.20) é demonstrado.

A expansão da equação (3.15), por sua vez, também é explicitada por partes. Inicial-

mente, os termos

$$\begin{aligned}
& f_R \left[\frac{B(r)}{2} \frac{d^2 N(r)}{dr^2} + \frac{1}{4} \frac{dB(r)}{dr} \frac{dN(r)}{dr} - \frac{1}{4} \frac{B(r)}{N(r)} \left(\frac{dN(r)}{dr} \right)^2 + \frac{B(r)}{r} \frac{dN(r)}{dr} \right] \\
& = (f_{R0} + f_{RR0} \epsilon R_1(r)) \left[\epsilon (1 - 2\epsilon \Phi(r)) \frac{d^2 \Psi(r)}{dr^2} - \epsilon^2 \frac{d\Phi(r)}{dr} \frac{d\Psi(r)}{dr} - \frac{\epsilon^2}{2} \left(\frac{1 - 2\epsilon \Phi}{1 + 2\epsilon \Phi} \right) \left(\frac{d\Psi(r)}{dr} \right)^2 \right] \\
& + (f_{R0} + f_{RR0} \epsilon R_1(r)) \left(2\epsilon \frac{(1 - 2\epsilon \Phi)}{r} \frac{d\Psi}{dr} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
& = \epsilon f_{R0} \left(\frac{d^2 \Psi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Psi(r)}{dr} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{3.26}
\end{aligned}$$

são exibidos. Por último, os fatores

$$\begin{aligned}
& -N(r) \frac{d^2 f_R}{dr^2} - N(r) \frac{df_R}{dr} \left(+ \frac{1}{2} \frac{dB(r)}{dr} + \frac{2B(r)}{r} \right) + \frac{f(R)}{2N(r)} \\
& = -\epsilon (1 + 2\epsilon \Psi(r)) f_{RR0} \frac{d^2 R_1(r)}{dr^2} - \epsilon (1 + 2\epsilon \Psi(r)) f_{RR0} \frac{dR_1(r)}{dr} \left(-\epsilon \frac{d\Phi(r)}{dr} + 2 \frac{1 - 2\epsilon \Phi(r)}{r} \right) \\
& + \frac{f_0 + \epsilon f_{R0} R_1(r)}{2(1 + 2\epsilon \Psi(r))} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
& = -\frac{f_0}{2} + \epsilon \left[-f_{RR0} \frac{d^2 R_1(r)}{dr^2} - \frac{2f_{RR0}}{r} \frac{dR_1(r)}{dr} + \frac{f_{R0} R_1(r)}{2} - f_0 \Psi(r) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{3.27}
\end{aligned}$$

presentes no lado esquerdo da equação (3.15), são apresentados. Mediante a utilização desses resultados, é possível concluir que a expansão em primeira ordem da componente 00 das equações de campo é equivalente a

$$\begin{aligned}
& \epsilon \left[f_{R0} \left(\frac{d^2 \Psi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Psi(r)}{dr} \right) - f_{RR0} \left(\frac{d^2 R_1(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_1(r)}{dr} \right) + \frac{f_{R0} R_1(r)}{2} - f_0 \Psi(r) - \kappa^2 T_{00} \right] - \\
& - \frac{f_0}{2} = \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{3.28}
\end{aligned}$$

Com o objetivo de comparar os resultados obtidos nesta seção com o desenvolvimento apresentado em Chiba et al. (2007), apenas as componentes mistas, sendo uma covariante e a outra contravariante, das equações de campo são solucionadas. Numa expansão perturbativa em torno da métrica de Minkowski, a transformação das equações de campo covariantes possui uma estrutura algébrica elementar. Portanto, esse procedimento é omitido e apenas

os resultados são apresentados. A componente 00 mista é, em primeira ordem, igual a

$$f_{R0}\nabla^2\Psi(r) - f_{RR0}\nabla^2R_1(r) + \frac{f_{R0}R_1(r)}{2} = \kappa^2\rho. \quad (3.29)$$

O desdobramento, adotado na demonstração da igualdade acima, é utilizado no cálculo da expansão da equação (3.19). Em primeiro lugar, os termos proporcionais a f_R são, em primeira ordem, iguais a

$$\begin{aligned} & f_R \left[-\frac{1}{rB(r)} \frac{dB(r)}{dr} + \frac{1}{4N(r)^2} \left(\frac{dN(r)}{dr} \right)^2 - \frac{1}{2N(r)} \frac{d^2N(r)}{dr^2} - \frac{1}{4N(r)B(r)} \frac{dB(r)}{dr} \frac{dN(r)}{dr} \right] \\ &= (f_{R0} + \epsilon f_{RR0}R_1) \left(\frac{2}{r(1-2\epsilon\Phi(r))} \frac{d\Phi(r)}{dr} + \mathcal{O}(\epsilon^2) - \frac{1}{1+2\epsilon\Psi(r)} \frac{d^2\Psi(r)}{dr^2} - \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \\ &= \epsilon f_{R0} \left(\frac{2}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} - \frac{d^2\Psi(r)}{dr^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Em segundo lugar, os fatores

$$\begin{aligned} \frac{df_R}{dr} \left(\frac{1}{2N(r)} \frac{dN(r)}{dr} + \frac{2}{r} \right) - \frac{f(R)}{2B(r)} &= \epsilon f_{RR0} \frac{dR_1(r)}{dr} \left(\mathcal{O}(\epsilon) + \frac{2}{r} \right) - \frac{f_0 + \epsilon f_{R0}R_1(r)}{2(1-2\epsilon\Phi(r))} \\ &= -\frac{f_0}{2} + \epsilon \left(\frac{2f_{RR0}}{r} \frac{dR_1(r)}{dr} + f_0\Phi(r) - \frac{f_{R0}R_1(r)}{2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (3.31)$$

presentes no lado esquerdo da equação de campo, são exibidos.

Por fim, a expansão (3.25) é pressuposta e a transformação, para substituir um índice covariante por um análogo contravariante, é aplicada. A componente 11 é, por conseguinte, igual a

$$f_{R0} \left(\frac{2}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} - \frac{d^2\Psi(r)}{dr^2} \right) + \frac{2f_{RR0}}{r} \frac{dR_1(r)}{dr} - \frac{f_{R0}R_1(r)}{2} = 0. \quad (3.32)$$

A obtenção, da última componente a ser determinada, é análoga à demonstração das equações (3.29) e (3.32). Em primeiro lugar, os termos

$$\begin{aligned} & f_R \left(-\frac{r}{2} \frac{dB(r)}{dr} + 1 - B(r) - \frac{rB(r)}{2N(r)} \frac{dN(r)}{dr} \right) \\ &= (f_{R0} + \mathcal{O}(\epsilon)) \left(+\epsilon r \frac{d\Phi(r)}{dr} + 2\epsilon\Phi(r) - \epsilon \frac{r(1-2\Phi(r))}{1+2\Psi(r)} \frac{d\Psi(r)}{dr} \right) \\ &= \epsilon f_{R0}r^2 \left(\frac{1}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} + \frac{2}{r^2}\Phi(r) - \frac{1}{r} \frac{d\Psi(r)}{dr} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (3.33)$$

proporcionais a f_R , são calculados. Em segundo lugar, os fatores

$$\begin{aligned}
 & r^2 \frac{d^2 f_R}{dr^2} + r^2 \frac{df_R}{dr} \left(+ \frac{B(r)}{2N(r)} \frac{dN(r)}{dr} + \frac{1}{2} \frac{dB(r)}{dr} + \frac{B(r)}{r} \right) - \frac{r^2 f(R)}{2} \\
 & = r^2 \epsilon f_{RR0} \frac{d^2 R_1(r)}{dr^2} + r^2 \epsilon f_{RR0} \frac{dR_1(r)}{dr} \left(\mathcal{O}(\epsilon) + \frac{1 - \mathcal{O}(\epsilon)}{r} \right) - \frac{r^2}{2} (f_0 + \epsilon f_{R0} R_1(r)) \\
 & = -\frac{r^2 f_0}{2} + \epsilon \left(f_{RR0} \frac{d^2 R_1(r)}{dr^2} + f_{RR0} \frac{dR_1(r)}{dr} - \frac{f_{R0} R_1(r)}{2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

presentes no lado esquerdo da equação (3.20), são expandidos. Por fim, as expressões proporcionais às diferentes potências do parâmetro ϵ são igualadas a zero e, em seguida, a transformação, que troca uma componente covariante por uma contravariante, é aplicada. O resultado desse desdobramento é apresentado na fórmula

$$f_{R0} \left(\frac{1}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} + \frac{2}{r^2} \Phi(r) - \frac{1}{r} \frac{d\Psi(r)}{dr} \right) + f_{RR0} \frac{d^2 R_1(r)}{dr^2} + f_{RR0} \frac{dR_1(r)}{dr} - \frac{f_{R0} R_1(r)}{2} = 0. \tag{3.35}$$

As expressões (3.29), (3.32) e (3.35) determinam a dinâmica dos campos, $R_1(r)$, $\Psi(r)$ e $\Phi(r)$. Por conveniência, o traço das equações de campo também é utilizado na análise exibida no restante deste capítulo, com o objetivo de permitir a obtenção do d'alembertiano, $\nabla^2 R_1$, como função da densidade de energia de matéria não relativística. Essa é uma relação importante, a ser empregada no cálculo do campo $\Psi(r)$, por intermédio da expressão (3.29) (Chiba et al. 2007).

A equação em ordem zero delimita o valor do parâmetro R_{dS} . A igualdade $R_{\text{dS}} = 0$ soluciona essa expressão nos casos em que $f(R=0) = 0$, resultado coerente com a escolha, em ordem zero na expansão (3.24), da métrica de Minkowski. Todavia, valores não nulos desse escalar também implicam a satisfação dessa equação e, neste capítulo, a expressão $R_{\text{dS}} \neq 0$ é postulada. Essa hipótese está em franca contradição com a expansão (3.24).

Esse paradoxo é contornado do ponto de vista físico. A maioria dos modelos $f(R)$ prevê, na cosmologia, uma solução do tipo de Sitter para o vácuo. Ratificando esse fato, é demonstrado no capítulo 5 que a solução de Minkowski é instável em distintos exemplos analisados na literatura, pois o valor f_{RR0} é negativo nesses casos. Além disso, existem modelos que nem preveem a existência do espaço-tempo de Minkowski, tais como a lagrangiana $f(R) = R - 2\Lambda$, empregada no modelo Λ CDM. Em todos esses casos, a expansão (3.24) não deve, a rigor,

ser utilizada. Em particular, o espaço-tempo de de Sitter não é estático e, portanto, é indispensável considerar as diferentes componentes da métrica dependentes do tempo.

Entretanto, é tão longo o intervalo de tempo necessário para que esses elementos variem de forma considerável, que, para todos os efeitos práticos, as derivadas temporais dessas grandezas podem ser desprezadas. Nessa aproximação, as equações que governam a dinâmica dos campos $R_1(r)$, $\Psi(r)$ e $\Phi(r)$ são equivalentes às obtidas pela expansão (3.24) (Chiba et al. 2007). Logo, para pequenos intervalos temporais, quando comparados, na cosmologia, com o inverso do parâmetro de Hubble, a expansão (3.24) fornece a solução correta dos campos, em primeira ordem, apesar da inconsistência inerente à esse procedimento.

Conforme mencionado, o traço da equação de campo é útil para o cálculo do campo $\Psi(r)$ e, por conseguinte, a linearização

$$\begin{aligned}
 & f_R R - 2f(R) + 3\nabla^\mu \nabla_\mu (f_R) \\
 &= (f_{R0} + \epsilon f_{RR0} R_1(r))(R_{\text{ds}} + \epsilon R_1) - 2(f_0 + \epsilon f_{R0} R_1(r)) + 3\nabla^\mu \nabla_\mu (f_{R0} + \epsilon f_{RR0} R_1(r)) \\
 &= \epsilon [3f_{RR0} \nabla^\mu \nabla_\mu R_1(r) + R_1(r) (R_{\text{ds}} f_{RR0} - f_{R0} + 3\nabla^\mu \nabla_\mu (f_{RR0}))] + \\
 &+ f_{R0} R_{\text{ds}} - 2f_0 + 3\nabla^\mu \nabla_\mu (f_{R0}) \\
 &= -\epsilon \kappa^2 \rho
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

é demonstrada. Assim, em primeira ordem o traço das equações (1.14) é igual a

$$\nabla^2 R_1(r) - m^2 R_1(r) = -\frac{\kappa^2 \rho}{3f_{RR0}}. \tag{3.37}$$

O parâmetro m , presente na igualdade acima, é definido por meio da expressão

$$m^2 := \left(\frac{f_{R0}}{3f_{RR0}} - \frac{R_0}{3} - \frac{\nabla^\mu \nabla_\mu (f_{RR0})}{f_{RR0}} \right). \tag{3.38}$$

A eliminação do d'alembertiano, $\nabla^2 R_1(r)$, presente na equação de campo (3.29), resulta na equação diferencial

$$f_{R0} \nabla^2 \Psi(r) + R_1 \left(\frac{f_{R0}}{2} - f_{RR0} m^2 \right) = \frac{2\kappa^2 \rho}{3} \tag{3.39}$$

para o campo $\Psi(r)$.

Por intermédio da solução da equação (3.37), a função $R(r)$ é eliminada da expressão acima. Como consequência, uma expressão, relacionando o campo $\Psi(r)$ à densidade de energia, é determinada. A solução dessa expressão resolve metade do problema proposto nesta seção. Dado uma estrela não relativística, a forma funcional para o campo $\Psi(r)$ é obtida por meio dessa nova equação diferencial, restando apenas calcular o campo $\Phi(r)$.

3.2 Solução das Equações de Campo no Limite Perturbativo

Nesta seção, a equação (3.37) é solucionada mediante a utilização do método da função de Green. O primeiro passo consiste na resolução dessa equação, supondo uma densidade de energia ρ proporcional à delta de Dirac $\delta(r)$, conforme explicitado a seguir:

$$\nabla^2 G(r) - m^2 G(r) = -\frac{\kappa^2 \delta(r)}{3f_{RR0}}. \quad (3.40)$$

A técnica matemática necessária para resolver a equação acima é a transformada de Fourier. Em particular, a transformada de Fourier da função de Green $G(r)$, nomeada $\tilde{G}(k)$, é igual a

$$\tilde{G}(\vec{k}) := \int d^3x G(r) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \quad (3.41)$$

Em contrapartida, a transformada inversa é definida por meio da equação

$$G(r) := \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \tilde{G}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \quad (3.42)$$

A aplicação da transformada de Fourier em ambos os lados da equação (3.40) resulta na expressão

$$\tilde{G}(k) = -\frac{\kappa^2}{3f_{RR0}} \frac{1}{-k^2 - m^2}. \quad (3.43)$$

Para encontrar a função de Green $G(r)$, a transformada inversa deve ser empregada na equação acima. A integral é efetuada nas variáveis \vec{k} por meio da técnica de resíduos. No caso em que $m^2 > 0$, os pólos da transformada $\tilde{G}(k)$ ocorrem em $k = \pm im$, conforme exibido na figura 3.1a. Portanto, supondo que o parâmetro m é um número real, a função de Green $G(r)$ é igual a (Chiba et al. 2007)

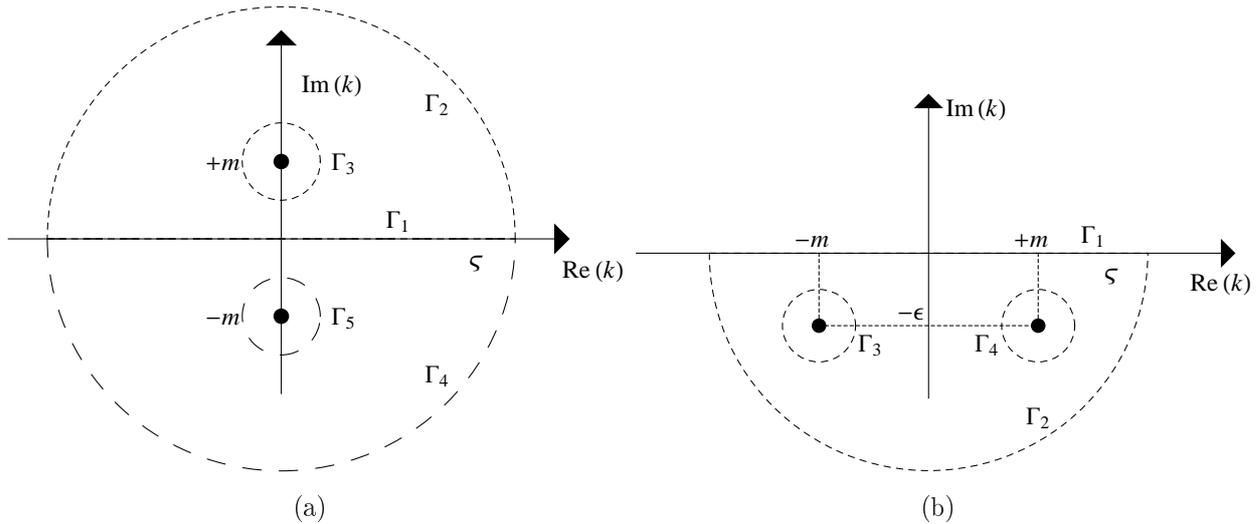


Figura 3.1: Na figura (a), os pólos da expressão (3.43), no caso particular $m^2 > 0$, são assinalados. Os tracejados curto e longo correspondem a diferentes caminhos utilizados na integração por resíduos da expressão (3.42). A semi-reta $[-\varsigma, \varsigma]$ é denominada Γ_1 , os semicírculos, de raio ς , presentes nos semi planos $\text{Im}(k) > 0$ e $\text{Im}(k) < 0$ são, respectivamente, intitulados Γ_2 (tracejado curto) e Γ_4 (tracejado longo). Por último, os círculos, de raio unitário, centrados nos pontos $k = im$ e $k = -im$ são apelidados Γ_3 e Γ_5 . Em compensação, a figura (b) aponta os pólos da expressão (3.43) no caso particular $m^2 < 0$. Os parâmetros Γ_1 e Γ_2 são definidos da maneira análoga aos respectivos fatores presentes na figura (a). Os círculos, de raio unitário, centrados nos pontos $k = -m - i\epsilon$ e $k = m - i\epsilon$ são nomeados Γ_3 e Γ_4 .

$$\begin{aligned}
 G(r) &= \frac{\kappa^2}{3f_{RR0}} \frac{1}{(2\pi)^3} \left[\int d^3k \frac{1}{(k - im)(k + im)} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right] \\
 &= \frac{\kappa^2}{3f_{RR0}} \frac{1}{(2\pi)^3} \left[\int_0^\infty dk k^2 \frac{1}{(k - im)(k + im)} \int d\Omega e^{ikr \cos(\theta)} \right] \\
 &= -\frac{i\kappa^2}{3f_{RR0}r} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^\infty dk k \frac{(e^{-ikr} - e^{ikr})}{(k - im)(k + im)} \right] \\
 &= -\frac{i\kappa^2}{6f_{RR0}r} \frac{1}{(2\pi)^2} \lim_{\varsigma \rightarrow \infty} \left[\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} dk k \frac{e^{ikr}}{(k - im)(k + im)} - \int_{\Gamma_1 + \Gamma_4} dk k \frac{e^{-ikr}}{(k - im)(k + im)} \right] \\
 &= -\frac{\kappa^2}{3f_{RR0}} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}.
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Em contrapartida, a localização dos pólos, quando $m^2 < 0$, precisa ser investigado com maior precaução. Em princípio, escolhas distintas, exibidas nas figuras 3.2a e 3.2b, à apresentada na figura 3.1b, são possíveis. Para entender por que os pólos explicitados na figura 3.1b são os corretos para integrar a equação (3.43), o estudo das funções de Green, aplicadas às equações da onda, é útil. Por um lado, a função de Green $G_R(r, t)$, calculada por meio de uma integral de resíduos ao redor dos pólos apresentados na figura 3.2a, é intitulada função

de Green retardada, pois ela descreve o perfil espacial de uma onda propagante no sentido positivo do eixo temporal. Nesse caso, a igualdade $G_R(r, t) = 0$ é satisfeita para $t < 0$.

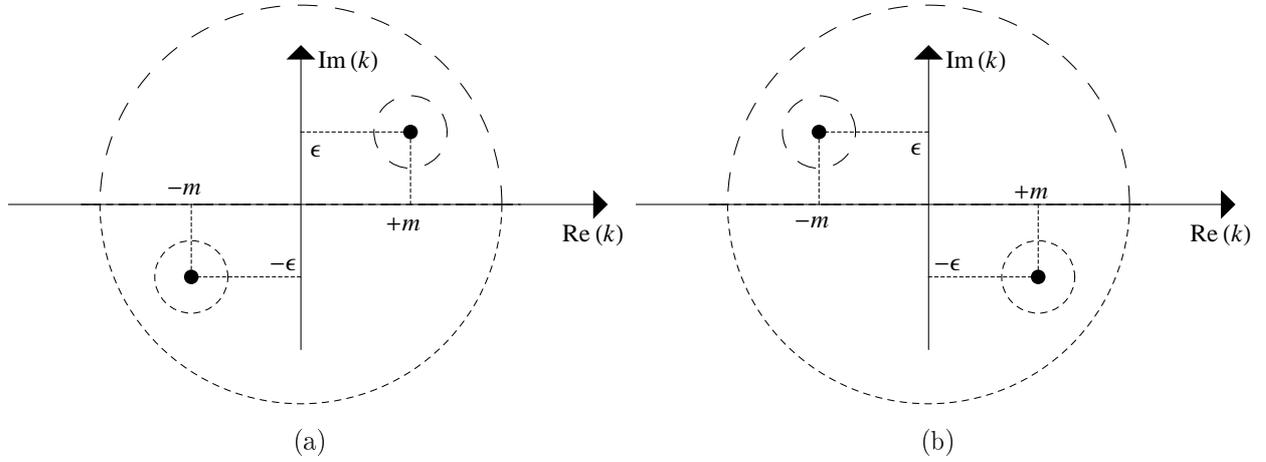


Figura 3.2: Na figura (a) a localização, dos pólos que geram a função de Green retardada, é exibida. Já na figura (b), é apresentada a localização dos pólos originários da função de Green avançada

Por outro lado, a função de Green $G_A(r, t)$, obtida mediante o cálculo de uma integral de resíduos ao redor dos pólos expostos na figura 3.2b, é denominada função de Green avançada, pois ela descreve o perfil espacial de uma onda propagante no sentido negativo do eixo temporal. Para a função avançada, a igualdade $G_A(r, t) = 0$ é satisfeita para $t > 0$. Uma função de onda estática, por sua vez, deve possuir um perfil espacial dado pela superposição dessas duas soluções dinâmicas. Os pólos da figura 3.1b fornecem uma superposição simétrica entre a função retardada e a função avançada. Portanto, a função de Green $G(r)$, dada pela transformada inversa da expressão (3.43) é, no caso $m^2 < 0$, igual a (Chiba et al. 2007)

$$\begin{aligned}
 G(r) &= -\frac{i\kappa^2}{3f_{RR0}r} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dk k \frac{(e^{-ikr} - e^{ikr})}{(k - i\epsilon - m)(k - i\epsilon + im)} \right] \\
 &= -\frac{i\kappa^2}{6f_{RR0}r} \frac{1}{(2\pi)^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\varsigma \rightarrow \infty} \left[\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} dk k \frac{e^{-ikr}}{(k - i\epsilon - m)(k - i\epsilon + im)} \right] \\
 &= -\frac{\kappa^2}{3f_{RR0}} \frac{1}{4\pi} \frac{\cos(mr)}{r}.
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Os desenvolvimentos (3.44) e (3.45) fornecem a função de Green para os casos $m^2 > 0$ e $m^2 < 0$. Essa função permite calcular uma solução particular para a equação (3.37). Para a obtenção da solução geral dessa equação, a solução homogênea ainda precisa ser avaliada.

No entanto, a perturbação $R_1(r)$ do escalar de Ricci é, na ausência de estrelas, igual a zero e, como consequência, o coeficiente da solução homogênea é nulo. Logo, a solução geral é, independente do sinal do quadrado da massa, igual a convolução entre a função de Green e a densidade de energia.

De posse da solução geral para o campo $R_1(r)$, o limite $mr \ll 1$ é examinado. Essa é uma hipótese fundamental, na medida em que a presença do efeito camaleão, responsável pela concordância entre as observações no sistema solar e as previsões das teorias $f(R)$, torna esse limite inválido. A partir da definição (3.38), é possível concluir que o limite $mr \ll 1$ é satisfeito se a condição (3.46) for válida, conforme visto a seguir:

$$\begin{aligned} 1 \gg |m^2|r^2 &= \left| \frac{1}{3} \left(\frac{f_{R0}}{f_{RR0}} - R_{\text{ds}} + \frac{3}{f_{RR0}} \frac{d^2 f_{RR0}}{dt^2} \right) \right| r^2 \\ &\geq \frac{1}{3} \left| \frac{f_{R0}}{f_{RR0}} \right| - \frac{1}{3} \left| R_{\text{ds}} + \frac{3}{f_{RR0}} \frac{d^2 f_{RR0}}{dt^2} \right| r^2 \approx \left| \frac{f_{R0}}{f_{RR0}} \right| r^2. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Na equação (3.46), o termo proporcional a $|d^2 f_{RR0}/dt^2|r^2$ foi desprezado, porque todas as funções em ordem zero, na expansão com relação ao parâmetro ϵ , variam de forma tão lenta no tempo, que as derivadas temporais desses termos não são relevantes na dinâmica do Sistema Solar. Já o parâmetro $|R_0|r^2$ também é desprezível de acordo com as observações.

Para entender como as observações vinculam o valor da expressão $|R_0|r^2$, é importante notar que o escalar de Ricci é igual a $(6\ddot{a}/a - 12H^2)$ na métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker. No universo de de Sitter, solução que descreve bem as soluções de vácuo de vários modelos $f(R)$, o escalar de Ricci é proporcional ao quadrado da função de Hubble. Portanto, o fator $|R_{\text{ds}}|r^2$ é da ordem de grandeza do valor do quadrado da razão entre o tamanho do Sistema Solar e o raio de Hubble, sendo, como consequência, ínfimo.

Para os modelos analisados na literatura, o valor da derivada f_R nas soluções de vácuo é, de modo aproximado, igual a $f_R = 1$. Por consequência, a exigência (3.46) restringe o valor da razão entre o quadrado da coordenada radial e a derivada f_{RR} . Essa razão motiva a definição

$$\lambda_{f_R} := 3 \left(\frac{1 + f_R}{f_{RR}} - R \right)^{-1/2} \approx \sqrt{3f_{RR}} \quad (3.47)$$

de uma escala de comprimento, denominado Compton e simbolizado pela variável λ_{f_R} (Hu & Sawicki 2007a).

A validade da hipótese (3.46) equivale a afirmar que o comprimento Compton da solução de vácuo é muito superior às escalas típicas do Sistema Solar. Postulando essa simplificação, as funções de Green para os casos $m^2 > 0$ e $m^2 < 0$ são, em primeira ordem com respeito a razão $r/\lambda_{f_{R0}}$, iguais a $1/(4\pi r)$, que é, a menos de um sinal, a função de Green da equação de Laplace.

Essa diferença de sinal é, por sua vez, decorrente da constante multiplicativa da densidade de energia, presente na equação (3.37). Logo, o termo proporcional à massa m , na equação (3.37), pode ser desprezado no limite (3.46), e a perturbação $R_1(r)$ é calculada a partir da integral

$$R_1(r) = \int d^3x' G(x - x') \rho(x') = \frac{\kappa^2}{12\pi f_{RR0}} \int d^3x' \frac{\rho(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (3.48)$$

A simetria esférica desse campo permite utilizar o teorema de Gauss-Ostrogradsky para demonstrar a expressão

$$R_1(r) = \frac{\kappa^2}{12\pi f_{RR0}} \frac{M}{r}. \quad (3.49)$$

Nessa igualdade, o parâmetro M equivale à massa da estrela. Em particular, pressupondo uma densidade de energia constante dentro da estrela, essa integral fornece a expressão $M = (4\pi r^3 \rho)/3$.

Mediante a substituição das fórmulas (3.49), para o campo $R_1(r)$, e $m^2 = 0$ na expressão (3.39), a análise dessa equação é retomada. Após a aplicação desse procedimento, a expressão

$$f_{R0} \nabla^2 \Psi(r) = \frac{2\kappa^2 \rho}{3} - \frac{f_{R0} \kappa^2}{24\pi f_{RR0}} \frac{M}{r}, \quad (3.50)$$

relacionando, de modo direto, o campo $\Psi(r)$ e a densidade de energia ρ , é determinada. A solução dessa equação é obtida a partir do resultado expresso na igualdade (3.49). Por conseguinte, o campo $\Psi(r)$ é, fora da estrela, igual a (Chiba et al. 2007)

$$\Psi(r) = -\frac{1}{4\pi} \frac{M_{\text{eff}}}{r}. \quad (3.51)$$

A massa efetiva, M_{eff} , presente na expressão acima, é definida por intermédio da igualdade

$$\begin{aligned} M_{\text{eff}} &= \frac{4\pi r^3}{3} \left(\frac{2\kappa^2 \rho}{3f_{R0}} - \frac{\kappa^2 M}{24\pi f_{RR0}} \right) \\ &= \frac{2\kappa^2 M}{3f_{R0}} - \frac{4\pi\kappa^2 M r^2}{72\pi f_{RR0}}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

De acordo com os resultados exibidos nas fórmulas (3.51) e (3.52), o campo $\Psi(r)$ é formado por dois termos com dependências espaciais bem distintas. Todavia, a hipótese (3.46) permite comparar o módulo desses diferentes fatores em todo intervalo de valores da coordenada radial. De acordo com essa equação, a igualdade $r^2/f_{RR0} \ll 1/f_{R0}$ é satisfeita e, portanto, o primeiro termo contido na definição da massa efetiva é preponderante (Chiba et al. 2007). Como consequência, esse campo é, de modo aproximado, igual a

$$\Psi(r) = -\frac{\kappa^2}{6\pi f_{R0}} \frac{M}{r}. \quad (3.53)$$

Para calcular o campo $\Phi(r)$, utilizando as expressões determinantes dos campos $R_1(r)$ e $\Psi(r)$, a igualdade (3.32) é examinada. Por intermédio da hipótese (3.46), essa equação é reescrita na forma

$$\begin{aligned} 0 &= f_{R0} \left[\frac{2}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} - \frac{d^2}{dr^2} \left(-\frac{\kappa^2}{6\pi f_{R0}} \frac{M}{r} \right) \right] + \frac{2f_{RR0}}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{\kappa^2}{12\pi f_{RR0}} \frac{M}{r} \right) - \frac{f_{R0}}{2} \left(\frac{\kappa^2}{12\pi f_{RR0}} \frac{M}{r} \right) \\ &= f_{R0} \left[\frac{2}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} + \frac{\kappa^2}{6\pi f_{R0}} \frac{d^2}{dr^2} \frac{M}{r} \right] + \frac{\kappa^2}{6\pi} \frac{d}{dr} \frac{M}{r} - \frac{\kappa^2}{24\pi} \frac{M}{r^3} \left(\frac{f_{R0} r^2}{f_{RR0}} \right) \\ &\approx \frac{2}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} - \frac{\kappa^2}{3\pi} \frac{d}{dr} \frac{M}{r} + \frac{\kappa^2}{6\pi} \frac{d}{dr} \frac{M}{r}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Esse resultado permite concluir que o campo $\Phi(r)$ obedece a equação

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{\kappa^2}{12\pi f_{R0}} \frac{d}{dr} \frac{M}{r}. \quad (3.55)$$

Por meio da integração de ambos os lados da equação (3.55), a expressão

$$\Phi(r) = \frac{\kappa^2}{12\pi} \frac{M}{r} = -\frac{\Psi(r)}{2}, \quad (3.56)$$

determinante da forma funcional do campo $\Phi(r)$, avaliado na região externa à estrela, é

obtida.

A partir da equação (3.56) e da definição $\gamma := \Phi(r)/\Psi(r)$, é possível demonstrar a igualdade $\gamma = -1/2$. Esse fator equivale a um dos parâmetros pós newtonianos utilizados, na literatura, para testar previsões de teorias métricas. No sistema solar, as observações impõe $\gamma \sim -1 \times 10^{-5}$ (Will 1993, Will 2006). Por isso, os resultados, obtidos por meio da utilização do método perturbativo, estão em franca contradição com os vínculos locais da gravitação.

3.3 Efeito Camaleão

A análise presente na seção anterior demonstra que o método perturbativo, consagrado na teoria da Relatividade Geral, prediz resultados, para as teorias $f(R)$, em discordância com as observações realizadas no Sistema Solar. À primeira vista, essa discrepância sugere que a maioria dos modelos $f(R)$ não são viáveis sendo, por consequência, descartados por esses testes observacionais. De acordo com Chiba et al. (2007), apenas as funções não expansíveis em série de Taylor, na vizinhança de R_0 , além das funções afim no escalar de Ricci, são aceitáveis. O caso afim, contudo, equivale à teoria da Relatividade Geral, acrescida de uma constante cosmológica.

No entanto, existem funções, aptas à expansão em série de Taylor, cujas previsões são compatíveis com as observações no Sistema Solar (Capozziello & Tsujikawa 2008). Para determinar as soluções viáveis, essa expansão não é aplicada, pois ela lineariza as equações de campo e são os efeitos não lineares presentes nas equações de campo que eliminam as discrepâncias entre as teorias $f(R)$ e os testes clássicos da gravitação.

Portanto, soluções compatíveis com as observações possibilitam grandes variações por definição num curto intervalo de valores da coordenada radial. Elas contêm uma mudança repentina no valor desse escalar, nas imediações da fronteira entre a estrela e o espaço exterior (Khoury & Weltman 2004a, Khoury & Weltman 2004b, Tamaki & Tsujikawa 2008). É justamente esse comportamento que a expansão em série de Taylor elimina. Como consequência, o método perturbativo não é adequado para a obtenção de soluções estáticas, esféricamente simétricas e viáveis.

Nesta dissertação, o estudo do efeito camaleão, mecanismo que compatibiliza as soluções das equações de campo com as observações, é apresentado no contexto das teorias do tipo escalar-tensorial. Em virtude da invariância desses modelos com respeito às transformações conformes, qualquer moldura pode ser adotada em princípio. Todas as variáveis e as equações são, nesta seção, definidas na moldura de Einstein. Além disto, a métrica de Minkowski é adotada. Essa hipótese simplifica o tratamento das equações de campo e não elimina a física subjacente. No espaço-tempo de Minkowski, o traço dessas equações é igual a

$$\tilde{\nabla}^2 \phi = \frac{d^2 \phi}{d\tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}} \frac{d\phi}{d\tilde{r}} = \frac{dV_{\text{eff}}}{d\phi} . \quad (3.57)$$

Na igualdade acima, todos os parâmetros, definidos na moldura de Einstein, são caracterizados pelo índice "~". Essa notação é adotada em toda a seção. Além disso, o termo $dV_{\text{eff}}/d\phi$ é calculado a partir da equação

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{d\phi} = \frac{dV}{d\phi} + \sum_i \frac{\kappa^2}{\sqrt{6}} e^{\frac{4\phi}{\sqrt{6}}} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{T}_{\mu\nu}^{(i)}. \quad (3.58)$$

A priori é inconsistente considerar a métrica de Minkowski e, ao mesmo tempo, permitir uma variação do campo escalar ϕ , pois nesse espaço-tempo o escalar de Ricci é nulo em todos os pontos. Todavia, do ponto de vista físico, essa aproximação considera apenas que os termos da métrica, presentes no traço das equações de campo, não são muito relevantes, em estrelas não relativísticas, na determinação da dinâmica imposta ao campo ϕ pelo efeito camaleão.

Conforme enunciado em Khoury & Weltman (2004a) e em Khoury & Weltman (2004b), o efeito camaleão ocorre se e somente se o potencial $V(\phi)$ possui as seguintes propriedades:

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} V(\phi) = 0, \quad \lim_{\phi \rightarrow \infty} \frac{1}{V(\phi)} \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \quad \lim_{\phi \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{dV(\phi)}{d\phi}} \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} = 0, \quad \dots, \quad (3.59)$$

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} V(\phi) = \infty, \quad \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{1}{V(\phi)} \frac{dV(\phi)}{d\phi} = \infty, \quad \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{dV(\phi)}{d\phi}} \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} = \infty, \quad \dots. \quad (3.60)$$

Esses limites devem ser válidos para todas as derivadas de enésima ordem do potencial $V(\phi)$, com respeito ao campo escalar ϕ . O aspecto qualitativo de um potencial, que satisfaça as condições (3.59) e (3.60), pode ser examinado na figura 3.3. O exemplo $V(\phi) \propto \phi^{-n}$ é uma forma funcional característica das funções que originam esse efeito.

Nesse estudo, o tensor energia-momento assume a forma matricial

$$\tilde{T}^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

por hipótese. A pressão isotrópica equivale, no caso de estrelas não relativísticas, à termos de segunda ordem na expansão em série de Taylor, efetuada na vizinhança do valor de vácuo

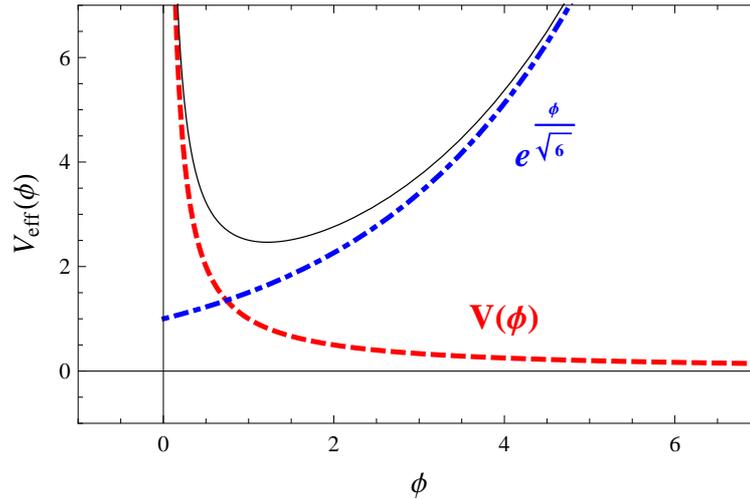


Figura 3.3: O perfil qualitativo de um potencial efetivo, compatível com a existência do efeito camaleão, é explicitado na curva preta contínua. A curva azul, tracejada e pontilhada corresponde ao termo do potencial efetivo proporcional à densidade de energia do meio. Já a curva vermelha e tracejada, indica a contribuição do potencial $V(\phi)$ (Khoury & Weltman 2004a, Khoury & Weltman 2004b).

do escalar de Ricci, e, portanto, são desprezados. Na moldura de Einstein, esse tensor não é conservado, conforme discutido no capítulo 1.2. Logo, a densidade de energia $\tilde{\rho}$ é função do campo ϕ . É útil, no entanto, encontrar uma forma funcional para esse parâmetro independente desse campo escalar. A existência de tal termo tornaria explícita a subordinação de todos os membros da equação (3.58) com relação a esse grau de liberdade. A expressão $\tilde{\rho} \exp(3\phi/\sqrt{6})$ é conservada, pois é igual a densidade de energia ρ calculada no moldura de Jordan (Wald 1984). A equação de campo (3.58) é, após essa substituição, equivalente à expressão

$$\frac{d^2 \phi}{d\tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}} \frac{d\phi}{d\tilde{r}} = \frac{dV}{d\phi} + \sum_i \frac{\kappa^2}{\sqrt{6}} e^{\frac{\phi}{\sqrt{6}}} \rho_i. \quad (3.62)$$

Para modelar o sistema Solar, o Sol é aproximado por um estrela de raio $\tilde{\mathcal{R}}$ e com uma densidade de energia constante. Já a matéria presente na região externa à estrela é modelada por um fluido homogêneo, com uma densidade igual à média de matéria escura presente no sistema Solar. O perfil

$$\rho(\tilde{r}) = \begin{cases} \rho_c & \text{para } \tilde{r} < \tilde{\mathcal{R}} \\ \rho_\infty & \text{para } \tilde{r} > \tilde{\mathcal{R}} \end{cases} \quad (3.63)$$

também pode ser utilizado no problema referente ao cálculo do campo ϕ no interior da Terra e na atmosfera ao seu redor. A inclusão de uma componente de matéria, contornando o Sol ou a Terra, com uma densidade de energia não nula é fundamental para a obtenção de resultados compatíveis com as observações (Khoury & Weltman 2004a, Khoury & Weltman 2004b).

Por definição, o fator ϕ_c é igual ao valor do campo ϕ que minimiza o potencial efetivo, presumindo uma densidade de energia no meio igual a ρ_c . Em contrapartida, é denominado ϕ_∞ o valor do campo ϕ que minimiza o potencial efetivo, supondo uma densidade de energia equivalente a ρ_∞ . Logo, ϕ_c e ϕ_∞ obedecem, respectivamente, as equações

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_c} + \frac{\kappa^2}{\sqrt{6}} e^{\frac{\phi_c}{\sqrt{6}}} \rho_c &= 0, \\ \left. \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_\infty} + \frac{\kappa^2}{\sqrt{6}} e^{\frac{\phi_\infty}{\sqrt{6}}} \rho_\infty &= 0. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Além das igualdades acima, também é necessário enunciar as quantidades m_c^2 e m_∞^2 , definidas por intermédio das expressões

$$\begin{aligned} m_c^2 &:= \left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_c} = \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_c} + \left(\frac{\kappa}{\sqrt{6}} \right)^2 e^{\frac{\phi_c}{\sqrt{6}}} \rho_c, \\ m_\infty^2 &:= \left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_\infty} = \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_\infty} + \left(\frac{\kappa}{\sqrt{6}} \right)^2 e^{\frac{\phi_\infty}{\sqrt{6}}} \rho_\infty. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Por último, as condições de contorno

$$\phi(\tilde{r} = 0) = \phi_i, \quad \left. \frac{d\phi}{d\tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=0} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\tilde{r} \rightarrow \infty} \phi(\tilde{r}) \rightarrow \phi_\infty, \quad (3.66)$$

para o campo ϕ , são pressupostas.

Uma intuição física da solução da equação de campo (3.62), pressupondo as condições de contorno (3.66), é obtida, mediante a utilização de uma analogia heurística com a mecânica clássica. Nesse contexto, o campo ϕ e a coordenada \tilde{r} equivalem à posição de uma partícula pontual e a uma variável temporal. Portanto, a igualdade (3.62) pode ser interpretada como a equação dinâmica de uma partícula sob a influência do potencial $-V_{\text{eff}}$ (Khoury & Weltman 2004a, Khoury & Weltman 2004b).

Os perfis do potencial efetivo dentro e fora da estrela são ilustrados nas figuras 3.4a e 3.4b. Já a imagem 3.5 exemplifica a dinâmica de uma partícula pontual sob a ação

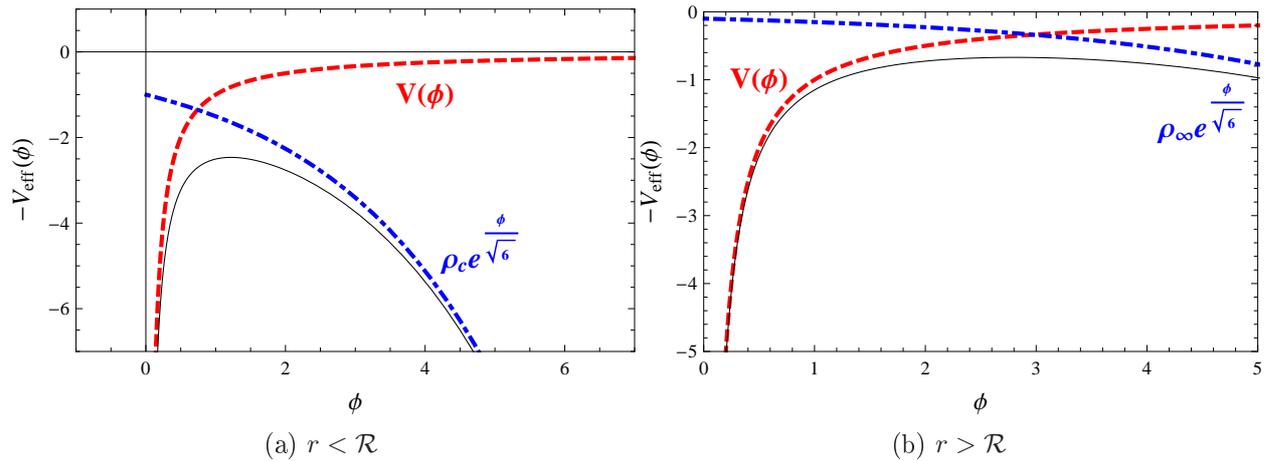


Figura 3.4: Na figura à esquerda, o perfil típico do potencial V_{eff} , considerando as altas densidades médias características de uma estrela, é apresentado. Já a figura à direita expõe o perfil do potencial V_{eff} , considerando uma baixa densidade, comparado com a estelar (Khoury & Weltman 2004a, Khoury & Weltman 2004b).

desses potenciais. Utilizando esses gráficos, uma visão intuitiva da solução da equação (3.62) pode ser construída, mesmo sem resolvê-la de maneira explícita (Khoury & Weltman 2004a, Khoury & Weltman 2004b).

O valor central do campo ϕ , designado ϕ_i , é próximo à ϕ_c por hipótese. Nessa situação, a dinâmica desse campo, na vizinhança do ponto $r = 0$, é dominada pelo termo de atrito presente na equação (3.62), pois a derivada do potencial efetivo é, de modo aproximado, igual a zero. Assim, o campo permanece inalterado até um determinado valor, nomeado $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{roll}}$, inferior ao raio \mathcal{R} da estrela.

No intervalo $[\tilde{\mathcal{R}}_{\text{roll}}, \mathcal{R}]$, a dinâmica do campo ϕ é determinada pela força induzida pelo potencial $-V_{\text{eff}}$. Por consequência, a variação desse campo é uma função crescente na coordenada radial. Esse comportamento pode ser entendido por intermédio da analogia mecânica, pois, nesse intervalo, a partícula inicia uma descida na barreira de potencial exibida na figura 3.5. Por causa da instabilidade do ponto de equilíbrio ϕ_c , a força que a afasta dessa vizinhança é proporcional à distância dela a esse ponto.

A mudança de densidade na fronteira da estrela altera o perfil do potencial efetivo $-V_{\text{eff}}$. Em particular, a força induzida muda de sentido e passa a desacelerar as variações do campo ϕ na variável radial. De acordo com a analogia mecânica, a partícula inicia uma escalada na barreira do novo potencial, conforme mostrado na imagem (3.5), à custa da energia cinética acumulada no interior da estrela.

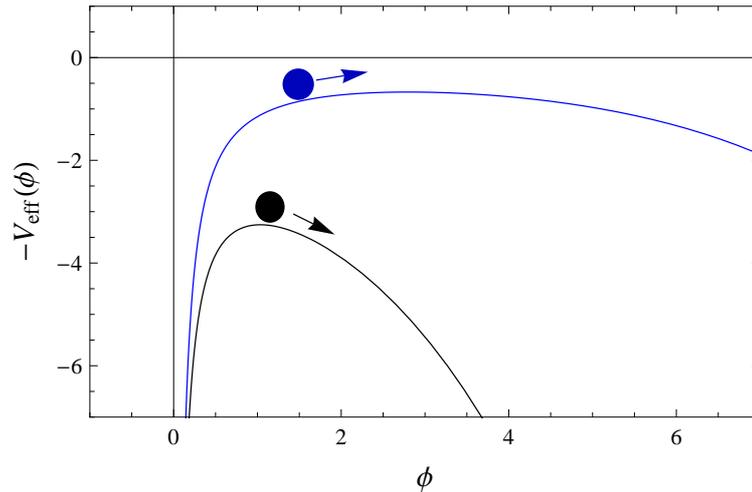


Figura 3.5: Dinâmica de uma partícula clássica, representada pelos discos preto e azul, sob a ação do potencial $-V_{\text{eff}}(\phi)$ dentro de uma estrela (disco e linha preta) e fora de uma estrela (disco e linha azul).

Nos casos em que a quantidade de energia cinética, adquirida no percurso $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{roll}} < \tilde{r} < \tilde{\mathcal{R}}$, é igual à necessária para vencer a barreira de potencial existente no intervalo $r > \tilde{\mathcal{R}}$, a partícula tende ao máximo do potencial externo $-V_{\text{eff}}$ no limite $\tilde{r} \rightarrow \infty$. Em outras situações, dois comportamentos distintos são obtidos nesse limite.

Para um valor ρ_{∞} fixo, se a diferença $\phi_c - \phi_i$ é grande quando comparada a unidade, então a quantidade de energia cinética que a partícula ganha, no interior da estrela, é suficiente para ultrapassar a barreira do potencial externo. Em compensação, se essa diferença é pequena, então a partícula não tem energia para escalar inteiramente essa barreira e, assim, ela retorna antes mesmo de alcançar o ponto de máximo desse potencial. Em ambos os casos, a condição de contorno para o campo ϕ , imposta no limite $\tilde{r} \rightarrow \infty$, não é satisfeita.

Variações na densidade de energia, da região externa à estrela, também afetam a dinâmica da solução da equação (3.62). Quanto menor essa densidade, maior a barreira do potencial externo. Logo, o valor, da diferença $\phi_c - \phi_i$, necessário para obter uma solução do tipo de Sitter é inversamente proporcional à magnitude do parâmetro ρ_{∞} .

Na vizinhança de ϕ_c , o potencial, V_{eff} , pode ser aproximado por uma função quadrática na variável ϕ . A sua derivada varia, portanto, de forma linear no campo escalar ϕ , com um coeficiente dado por $d^2V_{\text{eff}}/d\phi^2|_{\phi=\phi_c}$. Nesse intervalo, a equação (3.62) é equivalente à igualdade

$$\frac{d^2\phi}{d\tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}} \frac{d\phi}{d\tilde{r}} - m_c^2\phi = 0, \quad (3.67)$$

O entendimento qualitativo da solução da equação (3.62), permite enunciar o efeito Camaleão. Ele prediz a redução, proporcional ao fator $(\tilde{\mathcal{R}}_{\text{roll}} - \tilde{\mathcal{R}})/\tilde{\mathcal{R}}$, da força externa induzida pelo campo ϕ , na situação em que a região $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{roll}} < \tilde{r} < \tilde{\mathcal{R}}$ ocupa um volume é muito inferior ao estelar. Essa zona, pertencente ao interior da estrela, é designada, nessa conjuntura, *Thin Shell*.

Nos parágrafos anteriores, a causa desse efeito foi, de forma parcial, elucidada. Nos casos em que a diferença $\phi_i - \phi_c$ é muito inferior a 1, o campo ϕ é, em todo setor $\tilde{r} < \tilde{\mathcal{R}}_{\text{roll}}$, aproximadamente igual a ϕ_c , pois a dinâmica é dominada pelo termo de atrito presente na equação (3.62). Mediante a resolução da equação (3.67), por meio do uso de funções de Green, é possível concluir que a contribuição dessa região, para o módulo do campo ϕ externo, é proporcional ao fator $e^{-m_c \tilde{r}}/\tilde{r}$.

Face às altas densidades de energia presentes nos interior das estrelas, a massa, m_c^2 , é bastante elevada, suprimindo a parcela, do campo ϕ externo, originado no intervalo $\tilde{r} < \tilde{\mathcal{R}}$. O campo é, por conseguinte, proporcional a (Khoury & Weltman 2004a, Khoury & Weltman 2004b)

$$\phi(\tilde{r}) \propto \left(\frac{\Delta \tilde{\mathcal{R}}}{\tilde{\mathcal{R}}} \right) \frac{e^{-m_c \tilde{r}}}{\tilde{r}} + \phi_\infty. \quad (3.68)$$

A diferença $\Delta \tilde{\mathcal{R}}$, presente nessa expressão, é definida a partir da igualdade $\Delta \tilde{\mathcal{R}}/\tilde{\mathcal{R}} := (\tilde{\mathcal{R}}_{\text{roll}} - \tilde{\mathcal{R}})/\tilde{\mathcal{R}} \ll 1$.

Uma demonstração rigorosa, do resultado apresentado na equação (3.68), pode ser exibida, mediante a análise de quatro aspectos do perfil do potencial V_{eff} . Em primeiro lugar, no interior da região *Thin Shell* o campo ϕ se afasta do valor $\phi_i \approx \phi_c$ adotado na condição de contorno. Em segundo lugar, o fator $\rho e^{\phi/\sqrt{6}}$ é preponderante no cálculo do potencial efetivo. Em terceiro lugar, a razão $\phi_c/\sqrt{6}$ é, de modo aproximado, igual a zero, permitindo a expansão da exponencial $e^{\phi/\sqrt{6}}$ em série de Taylor. Por fim, a expressão

$$\phi(\tilde{\mathcal{R}}_{\text{roll}}) = \phi_c \quad \text{e} \quad \left. \frac{d\phi}{d\tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=\tilde{\mathcal{R}}_{\text{roll}}} = 0 \quad (3.69)$$

enumera as condições de contorno a serem estipuladas na fronteira $\tilde{r} = \tilde{\mathcal{R}}_{\text{roll}}$.

Por intermédio das considerações enumeradas no parágrafo anterior, a equação (3.62)

resulta na expressão

$$\frac{d^2\phi}{d\tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}} \frac{d\phi}{d\tilde{r}} = \frac{\kappa^2 \rho_c}{\sqrt{6}} \quad (3.70)$$

no intervalo $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{roll}} < \tilde{r} < \tilde{\mathcal{R}}$. A igualdade

$$\phi(\tilde{r}) = \frac{\kappa^2 \rho_c \tilde{r}^2}{6\sqrt{6}} \quad (3.71)$$

exibe uma solução particular dessa expressão. Por meio da aplicação das condições de contorno (3.69), a solução geral

$$\phi(\tilde{r}) = \frac{\kappa^2 \rho_c}{3\sqrt{6}} \left(\frac{\tilde{r}^2}{2} + \frac{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{roll}}^3}{\tilde{r}} \right) - \frac{\kappa \rho_c \tilde{\mathcal{R}}_{\text{roll}}^2}{2} + \phi_c \quad (3.72)$$

é obtida (Khoury & Weltman 2004a, Khoury & Weltman 2004b).

Na fronteira $\tilde{r} = \tilde{\mathcal{R}}$, a forma funcional do potencial $-V_{\text{eff}}$ é alterada, em virtude da variação da densidade de energia do meio. De acordo com a visão qualitativa apresentada na figura (3.4b), a partícula clássica depara com uma barreira de potencial no intervalo $\tilde{r} > \tilde{\mathcal{R}}$. Face à presença do efeito camaleão, que impõe a relação $\Delta\tilde{\mathcal{R}} \ll \tilde{\mathcal{R}}$, a partícula não tem tempo suficiente no interior da estrela para se afastar do ponto que minimiza o potencial efetivo. Corroborando essa afirmação, existe uma proporcionalidade entre a diferença $\phi_c - \phi_\infty$ e a razão $\Delta\tilde{\mathcal{R}}/\tilde{\mathcal{R}}$. Portanto, o campo externo se mantém próximo do ponto ϕ_∞ e, nessa situação, a equação de campo (3.62) é bem aproximada pela expressão

$$\frac{d^2\phi}{d\tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}} \frac{d\phi}{d\tilde{r}} - m_\infty^2 \phi = 0. \quad (3.73)$$

A solução dessa equação é igual a

$$\phi(\tilde{r}) = -C \frac{e^{-m_\infty(\tilde{r}-\tilde{\mathcal{R}})}}{\tilde{r}} + \phi_\infty. \quad (3.74)$$

A constante C e a coordenada $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{roll}}$ são avaliadas mediante a exigência de continuidade das soluções (3.72), (3.74) e das respectivas derivadas, com respeito ao campo ϕ , na fronteira

$\tilde{r} = \tilde{\mathcal{R}}$. As expressões para esses dois vínculos são exibidas nas igualdades

$$\frac{\kappa^2 \rho_c}{3\sqrt{6}} \left(\frac{\tilde{\mathcal{R}}^2}{2} + \frac{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{roll}}^3}{\tilde{\mathcal{R}}} \right) - \frac{\kappa^2 \rho_c \tilde{\mathcal{R}}_{\text{roll}}^2}{2} \phi_c = -\frac{C}{\tilde{\mathcal{R}}} + \phi_\infty, \quad (3.75)$$

$$C = \frac{\kappa^2 \rho_c}{3\sqrt{6}} \frac{(\tilde{\mathcal{R}}^3 - \tilde{\mathcal{R}}_{\text{roll}}^3)}{1 + m_\infty \tilde{\mathcal{R}}}. \quad (3.76)$$

O valor do comprimento compton na região externa à estrela, calculado a partir da massa m_∞ , é muito superior ao raio solar. O produto $m_\infty \tilde{\mathcal{R}}$ é, assim, desprezível. Por intermédio da substituição do valor da constante C , obtido em (3.76) na equação (3.75), a expressão

$$\begin{aligned} \phi_\infty - \phi_c &= \frac{\kappa^2 \rho_c}{2\sqrt{6}} (\tilde{\mathcal{R}}^2 - \tilde{\mathcal{R}}_{\text{roll}}^2) \approx \frac{\tilde{\mathcal{R}} \kappa^2 \rho_c}{\sqrt{6}} (\tilde{\mathcal{R}} - \tilde{\mathcal{R}}_{\text{roll}}) \\ &= \frac{\kappa^2 6}{G\sqrt{6}} \frac{G\tilde{M}}{\tilde{\mathcal{R}}} \frac{\Delta\tilde{\mathcal{R}}}{\tilde{\mathcal{R}}} = \frac{6\kappa^2 \tilde{\Phi}_c}{G\sqrt{6}} \frac{\Delta\tilde{\mathcal{R}}}{\tilde{\mathcal{R}}} \end{aligned} \quad (3.77)$$

é demonstrada (Khoury & Weltman 2004a, Khoury & Weltman 2004b). A massa \tilde{M} e o potencial newtoniano são definidos por meio das igualdades $\tilde{M} := 4\pi\rho_c\tilde{\mathcal{R}}^3/3$ e $\tilde{\Phi}_c := G\tilde{M}/\tilde{\mathcal{R}}$. Logo, a diferença $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{roll}} - \tilde{\mathcal{R}}$ é, de maneira aproximada, igual a

$$\frac{\Delta\tilde{\mathcal{R}}}{\tilde{\mathcal{R}}} \approx \frac{G\sqrt{6}(\phi_\infty - \phi_c)}{6\kappa^2\tilde{\Phi}_c}. \quad (3.78)$$

Essa expressão é obtida pressupondo a validade da desigualdade $\Delta\tilde{\mathcal{R}}/\tilde{\mathcal{R}} \ll 1$ e, como consequência, a fórmula

$$\frac{G\sqrt{6}(\phi_\infty - \phi_c)}{6\kappa^2\tilde{\Phi}_c} \ll 1 \quad (3.79)$$

é satisfeita.

Mediante a suposição da desigualdade (3.79), constante C é simplificada, conforme visto

a seguir (Khoury & Weltman 2004a, Khoury & Weltman 2004b):

$$\begin{aligned} C &\approx \frac{\kappa^2 \tilde{\mathcal{R}}^3 \rho_c}{3\sqrt{6}} \left(1 - \frac{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{roll}}^3}{\tilde{\mathcal{R}}^3} \right) = \frac{\kappa^2 \tilde{\mathcal{R}}^3 \rho_c}{3\sqrt{6}} \left[1 - \left(1 - \frac{\Delta \tilde{\mathcal{R}}}{\tilde{\mathcal{R}}} \right)^3 \right] \\ &\approx \frac{3\kappa^2 \tilde{M}}{4\pi\sqrt{6}} \left(\frac{\Delta \tilde{\mathcal{R}}}{\tilde{\mathcal{R}}} \right). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Essa relação consiste no principal resultado previsto pelo efeito camaleão. Por um lado, nas soluções em que $\Delta \tilde{\mathcal{R}}/\tilde{\mathcal{R}} \ll 1$, a constante multiplicativa da força externa, induzida pelo potencial efetivo, é muito inferior a 1. Nesse caso, quanto menor a espessura da camada *Thin Shell*, menor é a intensidade dessa força.

Por outro lado, quando campo varia de maneira significativa, com relação ao valor estipulado na condição de contorno, ao longo de toda a estrela, tanto a solução satisfeita no interior estelar quanto a constante C podem ser obtidas a partir das equações (3.72) e (3.76), no limite $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{roll}} \rightarrow 0$. Essa situação é denominada *Thick Shell*, porque corresponde ao caso em que o volume da região *Thin Shell* é, de modo aproximado, igual ao volume de toda a estrela. Logo esses fatores são iguais a

$$\phi(\tilde{r}) = \frac{\kappa^2 \rho_c \tilde{r}^2}{6\sqrt{6}} + \phi_c, \quad (3.81)$$

$$C \approx \frac{3\kappa^2 \tilde{M}}{4\pi\sqrt{6}}. \quad (3.82)$$

Nesse último caso, a intensidade da força externa, produzida pela variação do potencial efetivo, não é reduzida por um pequeno fator multiplicativo e, portanto, esse perfil está descartada pelas observações, pois ele prevê $\gamma = -1/2$. O efeito camaleão atua apenas nas soluções do tipo *thin shell* e, como consequência, a satisfação da condição $\Delta \tilde{\mathcal{R}}/\tilde{\mathcal{R}} \ll 1$ é essencial para a viabilidade das teorias $f(R)$.

Capítulo 4

Introdução às Perturbações na Cosmologia

4.1 Introdução

Nesse Capítulo, as equações de evolução para as perturbações, em primeira ordem, da métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker são analisadas. Um aspecto fundamental, que distingue o estudo nas teorias $f(R)$ da Relatividade Geral, é a escala de distância em que o método perturbativo é válido. Na teoria da Relatividade Geral, acrescida ou não de uma constante cosmológica, existem apenas dois regimes dinâmicos: o linear e o não linear.

Em contrapartida, há três regimes dinâmicos nas teorias $f(R)$ (Hu & Sawicki 2007b). Eles se diferenciam pelo valor do módulo do vetor de onda \vec{k} . Esse, por sua vez, é definido por intermédio de uma decomposição de uma perturbação em combinações lineares de funções de onda $e^{i\vec{k}\vec{x}}$. O primeiro regime é válido para grandes comprimentos de onda, isto é, para números de onda \vec{k} pertencentes ao intervalo $k < 1 \times 10^{-1} h \text{ Mpc}^{-1}$, com $h \sim 7 \times 10^{-1}$. Nessa circunstância, a teoria de perturbações linear é válida e, além disso, o efeito camaleão não é relevante, pois a densidade de energia de matéria é da ordem de grandeza da densidade média de matéria não relativística no universo (de La Cruz-Dombriz, Dobado & Maroto 2008, Hu & Sawicki 2007b).

O segundo regime dinâmico é válido para distâncias intermediárias, caracterizadas por vetores de onda cujo módulo obedece a relação $1 \times 10^{-1} h \text{ Mpc}^{-1} < k < 1 h \text{ Mpc}^{-1}$. Apesar de ainda ser verdadeira a análise perturbativa, nessas escalas o efeito camaleão tem que

ser considerado, pois ele altera, de maneira determinante, a evolução das perturbações na matéria (Oyaizu, Lima & Hu 2008, Schmidt, Lima, Oyaizu & Hu 2009). O terceiro e último regime é o não linear, satisfeito no intervalo $k > 1 h \text{ Mpc}^{-1}$. Nele, todos os termos não lineares das equações de campo devem ser apreciados.

A existência de três regimes distintos é resultado da dependência, existente nas teorias $f(R)$, da interação gravitacional com a densidade do meio. A variação da forma funcional da força gravitacional, no limite newtoniano, pode ser parametrizada por meio de uma constante gravitacional efetiva, G_{eff} , definida a partir da equação

$$V(\vec{x}) = -\frac{GM}{r} - \alpha(k) \frac{(1 - e^{-r/r_s})}{r} := -G_{\text{eff}}(k) \frac{M}{r}. \quad (4.1)$$

Para escalas caracterizadas por um vetor de onda $k \gg 1 \times 10^{-1} h \text{ Mpc}^{-1}$, a constante gravitacional efetiva é, de modo aproximado, igual a $(4/3)G$, em que G é a constante newtoniana da gravitação. Em compensação, no intervalo $k \sim 1 h \text{ Mpc}^{-1}$, o parâmetro G_{eff} tende a G , em consequência da presença do efeito camaleão. Essa inconstância dificulta o desenvolvimento de uma análise semi-analítica da formação de estruturas (Oyaizu et al. 2008).

Por exemplo, a forma funcional de um perfil, inicialmente do tipo *top-hat*, de densidade de matéria não relativística não se mantém constante ao longo da evolução temporal das perturbações, ao contrário do que ocorre na teoria da Relatividade Geral (Schmidt et al. 2009). Corroborando esse fato, a integração das equações de evolução do modelo de colapso esférico da matéria, fundamentais para a descrição das perturbações pelo modelo de semi-analítico de halo, descrito em Cooray & Sheth (2002), no regime de validade do efeito camaleão só foi solucionada recentemente (Brax, Rosenfeld & Steer 2010).

O desenvolvimento a ser apresentado nesta sessão é restrito a análise perturbativa das equações de campo, desprezando o efeito camaleão. A demonstração dessas equações é exibida e a expressão, governante da evolução da densidade de energia da matéria não relativística, é obtida. Esse resultados permitem calcular a constante gravitacional efetiva para os diferentes modelos $f(R)$.

Nas escalas em que o regime linear é válido e o efeito camaleão é desprezível, uma abordagem empírica pode ser adotada no regime newtoniano. Ela permite, por exemplo, o estudo de simulações numéricas (Stabenau & Jain 2006), da função de correlação de N pontos

(Borisov & Jain 2009), do modelo de colapso esférico (Martino, Stabenau & Sheth 2009) e da formação de vazios (Martino & Sheth 2009), para diferentes valores das constantes α e r_s .

Nesse método, a constante gravitacional é função das escalas de distância por intermédio de um fator exponencial, com um valor fixo da constante de acoplamento, o que implica a não consideração do efeito camaleão. Por um lado, esse método empírico facilita a utilização de técnicas já desenvolvidas na literatura. Por outro lado, não é trivial incluir o efeito camaleão nessa metodologia, o que é fundamental para a obtenção de um quadro completo da dinâmica das perturbações da matéria não relativística.

O início da análise das perturbações consiste em explicitar a expansão

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-(1 + 2\epsilon\Phi(\eta, \vec{x}))d\eta^2 + (1 - 2\epsilon\Psi(\eta, \vec{x})) (dr^2 + r^2d\Omega^2) \right] \quad (4.2)$$

em primeira ordem da métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Nessa equação, o parâmetro adimensional ϵ controla a ordem da perturbação. Além disso, o parâmetro η representa o tempo conforme. No sistema de coordenadas escolhido, as componentes da métrica são adimensionais e, portanto, as igualdades $g_{00} = -a^2(\eta)(1 + 2\Phi(\eta, \vec{x}))$ e $g_{ij} = \delta_{ij} [a^2(\eta)(1 - 2\Psi(\eta, \vec{x}))]$ são verdadeiras. De posse do sistema de coordenadas e da métrica, as expansões (3.2) dos símbolos de Christoffel, com respeito ao parâmetro ϵ , são calculadas (de La Cruz-Dombriz et al. 2008).

Para simplificar a análise, as grandezas geométricas, além das equações de campo, são manipuladas no espaço de Fourier. Portanto, essas variáveis são exibidas como funções do tempo conforme η e do vetor de onda \vec{k} . A convenção de sinal para a transformada de Fourier é igual à utilizada nas equações (3.41) e (3.42). Além disso, a notação

$$\text{TF} \{ \Psi(\eta, \vec{x}) \} = \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) \quad (4.3)$$

é empregada para descrever grandezas no espaço recíproco. Apesar da equivalência entre os símbolos utilizados, nesta sessão, para designar uma transformada de Fourier e os empregados, anteriormente, para designar parâmetros na moldura de Einstein, essas operações não devem ser confundidas.

O cálculo dos símbolos de Christoffel é iniciado pela componente

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^0_{00} &= \text{TF} \left\{ \frac{g^{00}}{2} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial \eta} \right) \right\} \\
&= \text{TF} \left\{ \frac{(1 - 2\epsilon\Phi(\eta, \vec{x}))}{2a(\eta)^2} \left[2a(\eta) \frac{da(\eta)}{d\eta} (1 + 2\epsilon\Phi(\eta, \vec{x})) + 2a(\eta)^2 \epsilon \frac{\partial \Phi(\eta, \vec{x})}{\partial \eta} \right] \right\} \\
&= H(\eta) + \epsilon \frac{\partial \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} + \mathcal{O}(\epsilon^2) .
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Neste capítulo, a função $H(\eta)$ é definida por intermédio da equação $H(\eta) := a(\eta)^{-1} (da(\eta)/d\eta)$.

As transformadas das componentes Γ^0_{0i} e Γ^0_{ij} , por sua vez, são iguais a

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^0_{0i} &= \text{TF} \left\{ \frac{g^{00}}{2} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x_i} \right) \right\} \\
&= \text{TF} \left\{ \frac{1 - 2\epsilon\Phi(\eta, \vec{x})}{2a(\eta)^2} \left(2a(\eta)^2 \epsilon \frac{\partial \Phi(\eta, \vec{x})}{\partial x_i} \right) \right\} \\
&= \text{TF} \left\{ \epsilon \frac{\partial \Phi(\eta, \vec{x})}{\partial x_i} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right\} = \epsilon i k_i \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) ,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^0_{ij} &= \text{TF} \left\{ -\frac{g^{00}}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial \eta} \right) \right\} \\
&= \text{TF} \left\{ \frac{(1 - 2\epsilon\Phi(\eta, \vec{x}))}{2a(\eta)^2} \delta_{ij} \left(2a(\eta) \frac{da(\eta)}{d\eta} (1 - 2\epsilon\Phi(\eta, \vec{x})) - 2a(\eta)^2 \epsilon \frac{\partial \Phi(\eta, \vec{x})}{\partial \eta} \right) \right\} \\
&= H(\eta) \delta_{ij} + \epsilon \delta_{ij} \left[-2H \left(\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) + \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) \right) - \frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) .
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Por último, as transformadas

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^i_{00} &= \text{TF} \left\{ -\frac{g^{im}}{2} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x_m} \right) \right\} \\
&= \text{TF} \left\{ \frac{(1 + 2\epsilon\Psi(\eta, \vec{x}))}{2a(\eta)^2} 2a(\eta)^2 \epsilon \frac{\partial \Phi(\eta, \vec{x})}{\partial x_i} \right\} \\
&= \epsilon i k_i \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) ,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}^i_{j0} &= \text{TF} \left\{ \frac{\partial g^{im}}{2} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial \eta} \right) \right\} \\
 &= \text{TF} \left\{ \frac{(1 + 2\epsilon\Psi(\eta, \vec{x}))}{2a(\eta)^2} \delta_{ij} \left[2a(\eta) \frac{da(\eta)}{d\eta} (1 - 2\epsilon\Psi(\eta, \vec{x})) - 2a(\eta)^2 \epsilon \frac{\partial \Psi(\eta, \vec{x})}{\partial \eta} \right] \right\} \\
 &= \delta_{ij} \left(H(\eta) - \epsilon \frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}^i_{jk} &= \text{TF} \left\{ \frac{g^{im}}{2} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_m} \right) \right\} \\
 &= \text{TF} \left\{ \frac{(1 + 2\epsilon\Psi(\eta, \vec{x}))}{2a(\eta)^2} (-2a(\eta)^2) \epsilon \left(\delta_{ij} \frac{\partial \Psi(\eta, \vec{x})}{\partial x_k} + \delta_k \frac{\partial \Psi(\eta, \vec{x})}{\partial x_j} - \delta_{jk} \frac{\partial \Psi(\eta, \vec{x})}{\partial x_i} \right) \right\} \\
 &= -i\epsilon \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) (k_k \delta_{ij} + k_j \delta_{ik} - k_i \delta_{jk}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

são demonstradas.

Mediante as expressões, (4.4), (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) e (4.9), é possível calcular as componentes do tensor de Ricci a partir da definição (3.3). A transformada da componente R_{00} é igual a

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}_{00} &= \text{TF} \left\{ \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{00}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{0\alpha}}{\partial \eta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} \Gamma^{\beta}_{00} - \Gamma^{\alpha}_{\beta 0} \Gamma^{\beta}_{0\alpha} \right\} \\
 &= \text{TF} \left\{ \frac{\partial \Gamma^i_{00}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma^i_{0i}}{\partial \eta} + \Gamma^i_{\beta i} \Gamma^{\beta}_{00} - \Gamma^i_{\beta 0} \Gamma^{\beta}_{0i} \right\} \\
 &= -k^2 \epsilon \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) - 3 \left(\frac{dH(\eta)}{d\eta} - \epsilon \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta^2} \right) - 3 \left(H(\eta) - \epsilon \frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} \right)^2 \\
 &\quad + 3 \left(H(\eta) - \epsilon \frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} \right) \left(H(\eta) + \epsilon \frac{\partial \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} \right) \\
 &= -3 \frac{dH(\eta)}{d\eta} + \epsilon \left[-k^2 \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) + 3 \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta^2} + 3H(\eta) \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} \right) \right], \\
 &\quad + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

Os diferentes fatores da transformada de Fourier das componentes R_{ij} são calculados à parte, para simplificar a demonstração dessas expressões. Em primeiro lugar, os fatores

$$\begin{aligned}
\text{TF} \left\{ \frac{\partial \Gamma_{ij}^\alpha}{\partial x_\alpha} \right\} &= \text{TF} \left\{ \frac{\partial \Gamma_{ij}^0}{\partial \eta} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x_k} \right\} \\
&= \frac{dH(\eta)}{d\eta} - \epsilon \delta_{ij} \left[2 \frac{dH}{d\eta} \left(\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) + \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) \right) + 2H(\eta) \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} \right) \right] \\
&\quad - \epsilon \delta_{ij} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta^2} + \epsilon \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) (2k_i k_j - k^2 \delta_{ij}) , \tag{4.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{TF} \left\{ \frac{\partial \Gamma_{\alpha i}^\alpha}{\partial x_j} \right\} &= \text{TF} \left\{ \frac{\partial \Gamma_{0i}^0}{\partial x_j} + \frac{\partial \Gamma_{ki}^k}{\partial x_j} \right\} \\
&= -\epsilon k_i k_j \left[\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) - 3\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) \right] , \tag{4.12}
\end{aligned}$$

pertencentes à equação (3.3), são obtidos. Em segundo lugar, os termos

$$\begin{aligned}
\text{TF} \{ \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha \Gamma_{ij}^\lambda \} &= \text{TF} \{ \Gamma_{00}^0 \Gamma_{ij}^0 + \Gamma_{0k}^0 \Gamma_{ij}^k + \Gamma_{k0}^\alpha \Gamma_{ij}^0 + \Gamma_{kl}^k \Gamma_{ij}^l \} \\
&= -4H(\eta) \epsilon \delta_{ij} \left[2H \left(\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) + \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) \right) + \frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} \right] \\
&\quad + H(\eta) \delta_{ij} \left[4H(\eta) + \epsilon \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} - 3 \frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} \right) \right] , \tag{4.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{TF} \{ \Gamma_{j\lambda}^\alpha \Gamma_{\alpha i}^\lambda \} &= \text{TF} \{ \Gamma_{j0}^0 \Gamma_{\alpha i}^0 + \Gamma_{j0}^k \Gamma_{ki}^0 + \Gamma_{jk}^0 \Gamma_{0i}^k + \Gamma_{jl}^k \Gamma_{ki}^l \} \\
&= H(\eta) \delta_{ij} \left(2H(\eta) - 2\epsilon \frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} \right) \\
&\quad - 2H(\eta) \epsilon \delta_{ij} \left[2H \left(\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) + \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) \right) + \frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} \right] , \tag{4.14}
\end{aligned}$$

são calculados e, por fim, a componente

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{ij} &= \delta_{ij} \left(\frac{dH(\eta)}{d\eta} + 2H(\eta)^2 \right) - 2\epsilon\delta_{ij} \left(\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) + \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) \right) \left(\frac{dH(\eta)}{d\eta} + 2H(\eta) \right) \\
&+ \epsilon\delta_{ij} \left[-H \left(\frac{\partial\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta} + 5\frac{\partial\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta} \right) - \frac{\partial^2\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta^2} - k^2\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) \right] \\
&+ \epsilon k_i k_j \left(\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) - \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) \right)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

é exibida. Para enunciar todas as componentes do tensor de Ricci, ainda é necessário calcular os índices

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{0j} &= \text{TF} \left\{ \frac{\partial\Gamma^\alpha_{0i}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{0\alpha}}{\partial x_i} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{0i} - \Gamma^\alpha_{\beta i}\Gamma^\beta_{0\alpha} \right\} \\
&= \epsilon i k_i \left[\frac{\partial\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta} - \frac{\partial\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta} \right] - 3\epsilon i k_i \frac{\partial\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta} + \epsilon i k_i H(\eta) \left[5\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) - 3\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) \right] \\
&- i k_i H(\eta) \left[2\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) - 3\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) \right] \\
&= 2i k_i \epsilon \left(\frac{\partial\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta} + H(\eta)\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) \right).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Por meio das componentes, (4.10) e (4.15), do tensor de Ricci, o escalar,

$$\begin{aligned}
R &= g^{00}R_{00} + \sum_{i=1}^3 g^{ii}R_{ii} \\
&= -\frac{6}{a(\eta)^2} \left(\frac{dH(\eta)}{d\eta} + H(\eta)^2 \right) + \frac{2}{a(\eta)^2} \epsilon \left[3\frac{\partial^2\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta^2} + 6 \left(\frac{dH(\eta)}{d\eta} + H(\eta)^2 \right) \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) \right] \\
&+ \frac{2}{a(\eta)^2} \epsilon \left[-k^2 \left(\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) - 2\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) \right) + 3H(\eta) \left(\frac{\partial\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta} + 3\frac{\partial\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta} \right) \right],
\end{aligned} \tag{4.17}$$

é obtido. As derivadas covariantes do campo f_R são calculadas em duas etapas. Inicialmente, a expressão

$$\begin{aligned}
\text{TF} \{ \nabla_0 \nabla_0 f_R \} &= \text{TF} \left\{ \frac{\partial^2 f_R}{\partial\eta^2} - \Gamma^0_{00} \frac{\partial f_R}{\partial\eta} \right\} \\
&= \text{TF} \left\{ \frac{\partial^2 f_R}{\partial\eta^2} - \left(H(\eta) + \epsilon \frac{\partial\Phi(\eta, \vec{x})}{\partial\eta} \right) \frac{\partial f_R}{\partial\eta} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right\},
\end{aligned} \tag{4.18}$$

é demonstrada, seguida das componentes

$$\begin{aligned}
 \text{TF} \{ \nabla_i \nabla_j f_R \} &= \text{TF} \left\{ \frac{\partial^2 f_R}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^\delta \frac{\partial f_R}{\partial x_\delta} \right\} \\
 &= \text{TF} \left\{ \frac{\partial^2 f_R}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij} \frac{\partial f_R}{\partial \eta} \left[H(\eta) - \epsilon \left(2H(\Phi(\eta, \vec{x}) + \Psi(\eta, \vec{x})) + \frac{\partial \Psi(\eta, \vec{x})}{\partial \eta} \right) \right] \right\} \\
 &\quad + \mathcal{O}(\epsilon^2) .
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Para prosseguir no cálculo das derivadas acima, as expansões em série de Taylor, (3.22) e (3.23), são postuladas, implicando o desprezo do efeito camaleão. Desse modo, mediante o uso dessas hipóteses, é simples demonstrar que essas derivadas são iguais a

$$\begin{aligned}
 \text{TF} \{ \nabla_0 \nabla_0 f_R \} &= \text{TF} \left\{ \frac{\partial^2 f_{R0}}{\partial \eta^2} - H(\eta) \frac{\partial f_{R0}}{\partial \eta} + \epsilon \left[\frac{\partial^2 (f_{RR0} \delta R)}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f_{R0}}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi(\eta, \vec{x})}{\partial \eta} \right] \right\} \\
 &\quad - \text{TF} \left\{ \epsilon \left(H(\eta) \frac{\partial (f_{RR0} \delta R)}{\partial \eta} \right) \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) ,
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
 \text{TF} \{ \nabla_i \nabla_j f_R \} &= \text{TF} \left\{ -\delta_{ij} H(\eta) \frac{\partial f_{R0}}{\partial \eta} + \epsilon \left[f_{RR0} \frac{\partial^2 \delta R}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij} H(\eta) \frac{\partial (f_{RR0} \delta R)}{\partial \eta} \right] \right\} \\
 &\quad + \text{TF} \left\{ \epsilon \delta_{ij} \frac{\partial f_{R0}}{\partial \eta} \left(2H(\Phi(\eta, \vec{x}) + \Psi(\eta, \vec{x})) + \frac{\partial \Psi(\eta, \vec{x})}{\partial \eta} \right) \right\} \\
 &\quad + \mathcal{O}(\epsilon^2) .
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

O fator δR , que corresponde à perturbação, em primeira ordem, do escalar de Ricci, pode ser inferido a partir da expressão (4.17). Entretanto, é útil utilizar a componente

$$\begin{aligned}
 &\text{TF} \left\{ f_R R_{ij} - \frac{1}{2} f(R) g_{ij} - \nabla_i \nabla_j (f_R) + \nabla^\mu \nabla_\mu (f_R) g_{ij} \right\} \\
 &= \text{TF} \{ f_R R_{ij} - \nabla_j \nabla_j f_R \} \\
 &= \epsilon f_{R0} k_i k_j \left(\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) - \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) \right) + f_{RR0} k_i k_j \epsilon \delta \tilde{R} = \delta \tilde{T}_{ij} ,
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

com $i \neq j$, das equações de campo, para prosseguir na expansão das equações (4.20) e (4.26) em potências de ϵ .

As distintas componentes do tensor energia-momento são, em primeira ordem, iguais a

$$T^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \rho_0(1 + \epsilon\delta) & -\epsilon(1 + c_s^2)\rho_0\frac{\partial v}{\partial x_i} & -\epsilon(1 + c_s^2)\rho_0\frac{\partial v}{\partial x_j} & -\epsilon(1 + c_s^2)\rho_0\frac{\partial v}{\partial x_k} \\ -\epsilon(1 + c_s^2)\rho_0\frac{\partial v}{\partial x_i} & p_0 - \epsilon\delta P & 0 & 0 \\ -\epsilon(1 + c_s^2)\rho_0\frac{\partial v}{\partial x_j} & 0 & p_0 - \epsilon\delta P & 0 \\ -\epsilon(1 + c_s^2)\rho_0\frac{\partial v}{\partial x_k} & 0 & 0 & p_0 - \epsilon\delta P \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Os parâmetros ρ_0 e p_0 equivalem à densidade de energia e à pressão isotrópica de matéria não relativística. Já o fator c_s^2 é definido por meio da igualdade $c_s^2 = \delta P/\delta\rho$. Por hipótese, tanto a solução de ordem zero, quanto a perturbação em primeira ordem dessas grandezas possuem a mesma equação de estado, implicando a igualdade $\delta P/\delta\rho = P_0/\rho_0$. Assim, no caso particular de uma perturbação na matéria não relativística, ambos os fatores p_0 e δP são nulos.

Com o objetivo de comparar e, ao mesmo tempo, utilizar os resultados obtidos em de La Cruz-Dombriz et al. (2008), as equações de campo com componentes mistas, sendo uma covariante e a outra contravariante, são utilizadas. As equações (4.28) guiam a transformação das grandezas geométricas necessárias para a obtenção das equações de campo. No caso particular das componentes $0i$, as equações com índices contravariantes são iguais as com índices mistos. Portanto, elas podem ser comprovadas a partir da substituição da expressão (4.23), para o tensor energia-momento, na equação (4.22). Como resultado, a expressão

$$\delta\tilde{R} = \frac{f_{R0} \left(\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) - \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) \right)}{f_{RR0}}. \quad (4.24)$$

para a perturbação do escalar de Ricci é demonstrada.

Por intermédio da expressão (4.24), as expansões, em primeira ordem,

$$\begin{aligned} \text{TF} \{ \nabla_0 \nabla_0 f_R \} &= \frac{\partial^2 f_{R0}}{\partial \eta^2} - H(\eta) \frac{\partial f_{R0}}{\partial \eta} + \epsilon \left[-\frac{\partial f_{R0}}{\partial \eta} \frac{\partial \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} + 2 \frac{\partial f_{R0}}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial^2 f_{R0}}{\partial \eta^2} + \epsilon \left[\left(\frac{\partial^2 (f_{R0})}{\partial \eta^2} - H(\eta) \frac{\partial (f_{R0})}{\partial \eta} \right) \left(\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) - \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) \right) \right] \\ &+ \epsilon \left[- \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} \right) H(\eta) f_{R0} + f_{R0} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned}
 \text{TF} \{ \nabla_i \nabla_j f_R \} &= -\delta_{ij} H(\eta) \frac{\partial f_{R0}}{\partial \eta} + \epsilon \left[- \left(\delta_{ij} H(\eta) \frac{\partial f_{R0}}{\partial \eta} + f_{R0} k_i k_j \right) \left(\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) - \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) \right) \right] \\
 &\quad + \epsilon \left[-\delta_{ij} H(\eta) f_{R0} \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} \right) + 2\delta_{ij} \frac{\partial f_{R0}}{\partial \eta} H \left(\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) + \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) \right) \right] \\
 &\quad + \epsilon \delta_{ij} \frac{\partial f_{R0}}{\partial \eta} \frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{x})}{\partial \eta} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{4.26}
 \end{aligned}$$

para as derivadas covariantes do campo f_R , são obtidas.

Todos os elementos necessários para enunciar as equações de campo foram calculados. Antes de apresentar as transformações necessárias para elevar um dos índices dessas equações, é útil aplicar, nelas, as expansões (3.22) e (3.23), com objetivo de simplificá-las. Esse procedimento é exibido na igualdade

$$\begin{aligned}
 \text{TF} \left\{ f_R R^\alpha_\beta - \frac{1}{2} f(R) g^\alpha_\beta - \nabla^\alpha \nabla_\beta (f_R) + \nabla^\mu \nabla_\mu (f_R) g^\alpha_\beta \right\} &= \\
 = \text{TF} \left\{ (f_{R0} + \epsilon f_{RR0} \delta R) (R^\alpha_\beta^{(0)} + \epsilon R^\alpha_\beta^{(1)}) - \frac{1}{2} (f_0 + \epsilon f_{R0} \delta R) (g^\alpha_\beta^{(0)} + \epsilon g^\alpha_\beta^{(1)}) \right\} \\
 + \text{TF} \left\{ -\nabla^\alpha \nabla_\beta (f_R) + \nabla^\mu \nabla_\mu (f_R) g^\alpha_\beta \right\} \\
 = \mathcal{O}(\epsilon^0) + \epsilon f_{R0} \left[\tilde{R}^\alpha_\beta^{(1)} + \tilde{R}^\alpha_\beta^{(0)} \left(\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) - \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) \right) - \frac{\tilde{g}^{\alpha(0)}_\beta}{2} \delta \tilde{R} \right] - \epsilon \frac{f_0}{2} \tilde{g}^{\alpha(1)}_\beta \\
 + \text{TF} \left\{ -\nabla^\alpha \nabla_\beta (f_R) + \nabla^\mu \nabla_\mu (f_R) g^\alpha_\beta \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

Os índices sobrescritos simbolizam, nessa equação, a ordem da expansão de uma determinada grandeza, tal como o tensor de Ricci, com relação à variável ϵ . Na passagem da segunda para terceira linha, a equação (4.24) foi utilizada para eliminar um dos termos δR presentes. Para substituir o outro termo, é mais apropriado utilizar os termos, de primeira ordem, exibidos na expressão (4.17). Por último, as transformações da métrica, do tensor de Ricci e das derivadas covariantes são iguais a

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}^\alpha_\beta &= \delta^\alpha_\beta, \\
 \tilde{R}^\alpha_\beta^{(0)} &= \tilde{g}^{\alpha\delta} \tilde{R}_{\delta\beta}^{(0)}, \\
 \tilde{R}^\alpha_\beta^{(1)} &= \tilde{g}^{\alpha\delta(0)} \tilde{R}_{\delta\beta}^{(1)}. \tag{4.28}
 \end{aligned}$$

Por meio de resultados já demonstrados, é possível obter a expressão

$$\begin{aligned}
 & \frac{f_{R0}}{a(\eta)^2} \left[-k^2 \left(\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) + \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) \right) + 3H(\eta) \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} \right) - 3 \frac{dH(\eta)}{d\eta} \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) \right] \\
 & + \left(3 \frac{dH(\eta)}{d\eta} - 6H(\eta)^2 \right) \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) + \frac{df_{R0}}{d\eta} \left(-9H(\eta) \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) + 3H(\eta) \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) - 3 \frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} \right) \\
 & = \frac{\kappa^2}{a(\eta)^2} \delta \tilde{\rho} ,
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

corresponde à componente 00 das equações de campo. Em contrapartida, as igualdades

$$\begin{aligned}
 & f_{R0} \left[\frac{\partial \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} + H(\eta) \left(\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) + \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) \right) \right] + \frac{df_R}{d\eta} \left(2\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) - \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) \right) \\
 & = -\kappa^2 \rho_0 (1 + c_s^2) \tilde{v} ,
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}
 & f_{R0} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta^2} + 3H(\eta) \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} \right) + 3 \frac{dH(\eta)}{d\eta} \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) \right] \\
 & + f_{R0} \left(\frac{dH(\eta)}{d\eta} + 2H(\eta)^2 \right) \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) + \frac{df_{R0}}{d\eta} \left(3H(\eta) \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) - H(\eta) \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}) + 3 \frac{\partial \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} \right) \\
 & = \kappa^2 \rho_0 c_s^2 \tilde{\delta} .
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

equivalem às componentes $0i$ e ij . Além dessas equações, é importante explicitar as expressões resultantes da conservação do tensor energia-momento. A primeira expressão desse sistema é igual a

$$\begin{aligned}
 T_0^\nu{}_{;\nu} & = \frac{\partial T_0^\nu}{\partial x_\nu} - \Gamma^\delta{}_{0\nu} T^\nu{}_\delta + \Gamma^\nu{}_{\nu\delta} T^\nu{}_0 \\
 & = \left[\frac{\partial \rho_0}{\partial \eta} + 3H\rho_0 (1 + c_s^2) \right] \tilde{\delta} + \rho_0 \left[\frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial \eta} - k^2 (1 + c_s^2) v - 3 \frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} (1 + c_s^2) \right] \\
 & = +\rho_0 \left[\frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial \eta} - k^2 (1 + c_s^2) \tilde{v} - 3 \frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} (1 + c_s^2) \right] \\
 & = 0 .
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

De maneira análoga, as igualdades

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} + \frac{c_s^2}{1 + c_s^2} \tilde{\delta} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} + H(\eta) \tilde{v} (1 - 3c_s^2) = 0 \quad (4.33)$$

são idênticas às componentes espaciais das equações de conservação.

No caso particular em que $c_s^2 = 0$, que corresponde à equação de estado da matéria não relativística, a velocidade \tilde{v} é igual a

$$\tilde{v} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{\partial \tilde{\delta}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} - 3 \frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} \right). \quad (4.34)$$

Por intermédio da utilização dessa expressão para eliminar essa velocidade na igualdade (4.33), a equação

$$\frac{\partial^2 \tilde{\delta}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta^2} + H(\eta) \frac{\partial \tilde{\delta}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} + k^2 \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}) - 3 \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta^2} - 3H(\eta) \frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta} = 0 \quad (4.35)$$

é obtida, relacionando a evolução do parâmetro $\tilde{\delta} = (\delta \tilde{\rho})/\rho$ com a dos potenciais $\tilde{\Phi}$ e $\tilde{\Psi}$.

4.2 Equação de Evolução para a Densidade de Energia da Matéria

As equações de campo predizem uma dependência dos potenciais $\tilde{\Phi}$ e $\tilde{\Psi}$ com a função $\tilde{\delta}$. Acrescido das equações de conservação, esse sistema determina a dinâmica da densidade de energia de matéria não relativística. Por um lado, as equações de campo indicam como a presença de matéria perturba a métrica. Por outro lado, as equações de movimento informam como a presença dos campos $\tilde{\Phi}$ e $\tilde{\Psi}$ altera distribuição dessa componente.

A obtenção de uma equação de evolução para o parâmetro δ , não dependente dos potenciais $\tilde{\Phi}$ e $\tilde{\Psi}$, a partir das equações de campo consiste no objetivo principal a ser alcançado nos parágrafos subsequentes. A demonstração dessa equação diferencial depende de uma série de etapas envolvendo longas e elementares manipulações algébricas. Por isso, tais passos são apenas listados, sem apresentar os resultados parciais de todos os procedimentos.

As equações (4.29) e (4.30) não contêm as derivadas $d^2\tilde{\Phi}/d\eta^2$ e $d^2\tilde{\Psi}/d\eta^2$. Nesse caso, por meio de uma substituição de variáveis, é possível utilizar essas expressões para encontrar as relações

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi} \left(\frac{\partial\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta}, \frac{\partial\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta}, \tilde{\delta}, \frac{\partial\tilde{\delta}}{\partial\eta} \right), \quad (4.36)$$

$$\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi} \left(\frac{\partial\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta}, \frac{\partial\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta}, \tilde{\delta}, \frac{\partial\tilde{\delta}}{\partial\eta} \right). \quad (4.37)$$

Mediante a derivação, com respeito ao tempo conforme, das equações (4.36) e (4.37), as funções

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta} = \frac{\partial\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta} \left(\frac{\partial^2\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta^2}, \frac{\partial^2\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta^2}, \tilde{\delta}, \frac{\partial\tilde{\delta}}{\partial\eta}, \frac{\partial^2\tilde{\delta}}{\partial\eta^2} \right), \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta} = \frac{\partial\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta} \left(\frac{\partial^2\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta^2}, \frac{\partial^2\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta^2}, \tilde{\delta}, \frac{\partial\tilde{\delta}}{\partial\eta}, \frac{\partial^2\tilde{\delta}}{\partial\eta^2} \right). \quad (4.39)$$

são demonstradas.

Uma análise, do sistema formado pelas expressões (4.36), (4.37), (4.38) e (4.39), permite afirmar que a obtenção de uma relação entre as derivadas $d^2\tilde{\Phi}/d\eta^2$ e $d^2\tilde{\Psi}/d\eta^2$ e a função δ é suficiente para resolvê-lo. Duas equações, envolvendo essas grandezas, são necessárias para demonstrar essa relação.

Por intermédio da substituição dos termos, presentes na equação (4.35), proporcionais ao potencial $\tilde{\Phi}$ e a derivada $d\tilde{\Psi}/d\eta$, pelos seus respectivos valores expressos nas igualdades (4.36) e (4.39), a primeira das duas equações é encontrada. Utilizando, em seguida, as funções (4.38) e (4.39) para eliminar a dependência, da expressão demonstrada, com relação às derivadas $d\tilde{\Phi}/d\eta$ e $d\tilde{\Psi}/d\eta$, a função

$$\frac{\partial^2\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta^2} = \frac{\partial^2\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta^2} \left(\frac{\partial^2\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta^2}, \tilde{\delta}, \frac{\partial\tilde{\delta}}{\partial\eta}, \frac{\partial^2\tilde{\delta}}{\partial\eta^2} \right) \quad (4.40)$$

é encontrada. Já a segunda equação é obtida a partir da derivada, com respeito ao tempo conforme, da equação (4.30). O resultado é expresso a seguir:

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta} - \frac{\partial\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta} = -\frac{f_{RR0}}{f_{R0}} \frac{\partial\delta R}{\partial\eta} + \left(\frac{f_{RR0}(df_{R0}/d\eta) - (df_{RR0}/d\eta)f_{R0}}{f_{R0}^2} \right) \delta R. \quad (4.41)$$

A perturbação do escalar de Ricci em primeira ordem, calculado mediante a contração do tensor de Ricci, contém termos proporcionais a derivada $d^2\tilde{\Psi}/d\eta^2$. Essa afirmação pode ser ratificada através de um exame da equação (4.17). Assim sendo, para evitar, na expressão (4.41), o aparecimento de derivadas terceira, com respeito ao tempo conforme, dos elementos da métrica, é indispensável substituir o termo, presente no escalar de Ricci, proporcional à derivada segunda desses potenciais pela função

$$\frac{\partial^2\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta^2} = \frac{\partial^2\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta^2} \left(\frac{\partial\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta}, \frac{\partial\tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial\eta}, \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k}), \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k}), \tilde{\delta}, \frac{\partial\tilde{\delta}}{\partial\eta}, \frac{\partial^2\tilde{\delta}}{\partial\eta^2} \right), \quad (4.42)$$

dependente de derivadas de menor ordem.

A função acima é provada a partir do cálculo das derivadas primeira, com relação ao tempo conforme, das equações (4.29) e (4.30). A derivada primeira da velocidade v é eliminada por intermédio da componente zero das equações de conservação, expressa em (4.32),

resultando nas fórmulas

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta^2}, \frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta}, \frac{\partial \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta}, \tilde{\delta}, \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial \eta} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta^2}, \frac{\partial \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta}, \frac{\partial \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta}, \tilde{\delta}, \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 \tilde{\delta}}{\partial \eta^2} \right). \quad (4.43)$$

Por meio de uma substituição de variáveis, a expressão (4.42) é provada. Por último, mediante o cálculo da derivada $\delta \tilde{R}/\delta \eta$, a equação (4.41) origina a função

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta^2}, \tilde{\delta}, \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 \tilde{\delta}}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^3 \tilde{\delta}}{\partial \eta^3} \right). \quad (4.44)$$

As expressões (4.40) e (4.44) formam um sistema fechado para as derivadas $d^2 \tilde{\Psi}/d\eta^2$ e $d^2 \tilde{\Phi}/d\eta^2$. Após uma substituição de variáveis, as fórmulas

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta^2} \left(\tilde{\delta}, \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 \tilde{\delta}}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^3 \tilde{\delta}}{\partial \eta^3} \right), \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}(\eta, \vec{k})}{\partial \eta^2} \left(\tilde{\delta}, \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 \tilde{\delta}}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^3 \tilde{\delta}}{\partial \eta^3} \right), \quad (4.46)$$

são comprovadas.

Por fim, por intermédio das expressões (4.45) e (4.46) para eliminar, do sistema formado pelas equações (4.36), (4.37), (4.38) e (4.39), as derivadas $d^2 \tilde{\Psi}/d\eta^2$ e $d^2 \tilde{\Phi}/d\eta^2$, as funções

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi} \left(\tilde{\delta}, \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 \tilde{\delta}}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^3 \tilde{\delta}}{\partial \eta^3} \right), \quad (4.47)$$

$$\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi} \left(\tilde{\delta}, \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 \tilde{\delta}}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^3 \tilde{\delta}}{\partial \eta^3} \right), \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta} \left(\tilde{\delta}, \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 \tilde{\delta}}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^3 \tilde{\delta}}{\partial \eta^3} \right), \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} \left(\tilde{\delta}, \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 \tilde{\delta}}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^3 \tilde{\delta}}{\partial \eta^3} \right). \quad (4.50)$$

são demonstradas.

Todas as funções, necessárias para a demonstração da equação de evolução para a densidade de energia de matéria não relativística, foram encontradas. Para finalizar a obtenção dessa expressão, ainda é preciso derivar a equação (4.47), com relação ao tempo conforme, e, em seguida, igualá-la à equação (4.49). O resultado é, de maneira esquemática, igual a (de La Cruz-Dombriz et al. 2008)

$$\beta_{4,f} \frac{\partial^4 \tilde{\delta}}{\partial \eta^4} + \beta_{3,f} \frac{\partial^3 \tilde{\delta}}{\partial \eta^3} + (\alpha_{2,EH} + \beta_{2,f}) \frac{\partial^2 \tilde{\delta}}{\partial \eta^2} + (\alpha_{1,EH} + \beta_{1,f}) \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial \eta} + (\alpha_{0,EH} + \beta_{0,f}) \tilde{\delta} = 0. \quad (4.51)$$

Os coeficientes $\alpha_{i,EH}$, com $i = 1..4$, correspondem aos parâmetros presentes na teoria da Relatividade Geral (de La Cruz-Dombriz et al. 2008). Em contrapartida, $\beta_{j,f}$, com $j = 1..4$, equivalem às correções introduzidas pelas teorias $f(R)$ (de La Cruz-Dombriz et al. 2008).

O limite newtoniano da equação acima é obtido mediante a expansão, dos termos α e β , em potências da razão entre a função de Hubble, $H(\eta)$, e o módulo do vetor de onda, k . Por conveniência, os parâmetros adimensionais

$$\kappa_i := \frac{1}{H(\eta)^{n+1}} \left(\frac{dH(\eta)}{d\eta} \right)^n, \quad (4.52)$$

$$f_j := \frac{1}{H(\eta)^j f_{R0}} \left(\frac{df_{R0}}{d\eta} \right)^j,$$

são utilizados.

Os valores dos coeficientes da expansão dos parâmetros α e β são explicitados, de forma detalhada, em de La Cruz-Dombriz et al. (2008) e, portanto, não são apresentados nesta dissertação. Todavia, é relevante notar que ambos os parâmetros $\beta_{3,f}$ e $\beta_{4,f}$ tendem, no limite $H(\eta)/k \rightarrow 0$, a termos proporcionais a $(H(\eta)/k)^2$. Esse fato motivam de La Cruz-Dombriz

et al. (2008) a desprezarem as derivadas de quarta e de terceira ordem, com respeito ao tempo conforme, da perturbação de densidade de energia de matéria não relativística. Logo, esse parâmetro evolue, no limite newtoniano, de acordo com a equação

$$\frac{\partial^2 \tilde{\delta}}{\partial \eta^2} + H(\eta) \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial \eta} + \frac{f_{R0}^5 H(\eta)^2 (-1 + \kappa_1) (2\kappa_1 - \kappa_2) - \frac{16}{a(\eta)^8} f_{RR0}^4 (\kappa_2 - 2) k^8 \pi G \rho_0 a(\eta)^2}{f_{R0}^5 (-1 + \kappa_1) + \frac{24}{a(\eta)^8} f_{RR0}^4 f_{R0} (\kappa_2 - 2) k^8} \tilde{\delta} = 0 . \quad (4.53)$$

Num capítulo posterior, essa expressão é utilizada para a obtenção do espectro de potência de perturbações de matéria não relativística. A discrepância entre o resultado previsto pela equação (4.53) e o resultado obtido em simulações numéricas, que não desprezam o efeito camaleão, também é examinada. Por último, o limite quase-estático, válido para determinados modelos, também é enunciado, simplificando, de forma expressiva, essa equação de evolução.

Capítulo 5

Teoremas de Estabilidade

Neste capítulo, as condições necessárias para garantir a estabilidade de soluções, na cosmologia, semelhantes à prevista pela teoria da Relatividade Geral são analisadas (Dolgov & Kawasaki 2003, Pogosian & Silvestri 2008, Faraoni 2006, Sawicki & Hu 2007). Esse resultado é dependente, de forma fundamental, do sinal da derivada f_{RR} . Além disso, são enunciadas as condições necessárias para evitar mudanças no sinal da constante gravitacional efetiva e do comportamento do gráviton, no contexto da teoria quântica de campos, transformando-o num campo do tipo *ghost*.

O estudo da estabilidade de soluções cosmológicas é subdividido em duas etapas. Em primeiro lugar, a prova original é exibida (Dolgov & Kawasaki 2003). Posteriormente, uma outra visão, baseada na equivalência existente entre teorias $f(R)$ e do tipo escalar-tensorial, é apresentada (Sawicki & Hu 2007). A demonstração explicitada em Dolgov & Kawasaki (2003) pressupõe a expansão

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \epsilon k_{\alpha\beta}(r, t) , \quad (5.1)$$

esfericamente simétrica e dependente do tempo. Os elementos $\eta_{\alpha\beta}$ equivalem às componentes da métrica de Minkowski. Nesse limite, a teoria da Relatividade Geral é postulada e, por consequência, a expansão

$$R = -\kappa T(r, t) + \epsilon R_1(r, t) \quad (5.2)$$

para o escalar de Ricci é pressuposta.

Conforme mencionado no capítulo 3, as expansões (5.1) e (5.2) podem ser criticadas em princípio, pois o espaço-tempo de Minkowski não é a solução do vácuo para a maioria das funções $f(R)$. Ratificando essa afirmação, foi demonstrado, no capítulo 3.1, que $R \neq 0$ também soluciona as equações de campo em métricas estáticas e esfericamente simétricas em ordem zero. Entretanto, o fator de escala, presente nas soluções do tipo de Sitter, varia numa escala de tempo muito superior às características da dinâmica estelar, e, por conseguinte, é possível utilizar a expansão (5.1), desde que o escalar de Ricci no vácuo não seja considerado nulo.

Antes de pressupor um modelo geral, o caso particular (Carroll et al. 2004)

$$f(R) = R - \alpha \left(\frac{R_0^2}{R} \right), \quad (5.3)$$

com $\alpha > 0$, é analisado (Dolgov & Kawasaki 2003). Esse modelo já foi estudado no capítulo 2, em que foi demonstrado a existência de uma fase muito instável dominada pela matéria não relativística. Nesse caso, a fase dominada pela radiação é seguida por um fase caracterizada pela codominância entre a matéria não relativística e as contribuições adicionais previstas por esse modelo nas equações de campo, em comparação com as equações de Einstein.

Para demonstrar a instabilidade da solução que, em ordem zero, coincide com as previsões da teoria da Relatividade Geral, o traço

$$\begin{aligned} f_R R - 2f(R) + 3\nabla^\mu \nabla_\mu f_R &= -R + \frac{3\alpha R_0^2}{R} + 3\nabla^\alpha \nabla_\alpha \left(\frac{\alpha R_0^2}{R^2} \right) \\ &\approx -\frac{6\alpha R_0^2}{R^3} \left[\partial_\mu \partial^\mu R - \frac{3(\partial_\mu R)(\partial^\mu R)}{R} + \frac{R^4}{6\alpha R_0^2} - \frac{R^2}{2} \right] \\ &= \kappa^2 T \end{aligned} \quad (5.4)$$

das equações de campo é calculado. Nessa expressão, os efeitos da perturbação sobre a métrica de Minkowski foram desprezados. Utilizando a expansão (5.2) na equação (5.4), a igualdade, em primeira ordem,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu R_1(r, t) - \frac{6}{T(r, t)} \partial_\mu T(r, t) \partial^\mu R_1(r, t) \\ + R_1(r, t) \left(\kappa^2 T(r, t) + \frac{3}{T(r, t)^2} \partial_\mu T(r, t) \partial^\mu T(r, t) - \frac{\kappa^6 T(r, t)^3}{6\alpha R_0^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

é obtida.

Por meio da (5.5), é possível demonstrar a instabilidade da perturbação $R_1(r, t)$ nos casos em que $f_{RR} < 0$. Na cosmologia, o escalar de Ricci e o tensor energia momento independem das coordenadas espaciais. Para simplificar essa demonstração, a igualdade $\alpha = 1$ é pressuposta. Por consequência, a expressão (5.5) se reduz a

$$\frac{d^2 R_1(t)}{dt^2} - \frac{6}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} \frac{dR_1(t)}{dt} + R_1(t) \left[\kappa^2 T + \frac{3}{T(t)^2} \left(\frac{dT(t)}{dt} \right)^2 - \kappa^2 T \left(\frac{\kappa^4 T(t)^2}{6R_0^2} \right) \right]. \quad (5.6)$$

Na era dominada pela matéria não relativística, $\kappa^2 T \approx H^2$ e, portanto, todos as contribuições da equação acima, a exceção do último termo, são da ordem de grandeza de $(H^2(t)R_1(t)) \times \mathcal{O}(1)$. Para desvios para o vermelho $z \geq 1 \times 10^3$, a razão $(\kappa^4 T(t)^2)/(6R_0^2)$ é maior ou igual a 1×10^9 , pois, em $a(t) = 1$, as relações $\kappa^2 \rho_{\text{matéria escura}} \sim \kappa^2 \rho_\Lambda \sim R_{\text{ds}}$ e $R_{\text{ds}} \sim R_0$ são válidas. Nessa aproximação, essa equação tende a

$$\frac{d^2 R_1(t)}{dt^2} + \gamma^2 \frac{dR_1(t)}{dt} - m^2 R_1(t) = 0, \quad (5.7)$$

com $\gamma^2 = -(6/T(t)^2)(dT(t)/dt)$ e $m^2 = (\kappa^6 T(t)^3)/(6R_0^2)$. A solução para essa equação diferencial é, desprezando a variação temporal do traço do tensor energia momento, igual a

$$R_1(t) = \left[A \exp \left(-\frac{\gamma^2 t}{2} + \frac{\sqrt{(\gamma^2 + 4m^2)t}}{2} \right) + B \exp \left(-\frac{\gamma^2 t}{2} - \frac{\sqrt{(\gamma^2 + 4m^2)t}}{2} \right) \right] \quad (5.8)$$

De fato, *a posteriori*, essa simplificação dos coeficientes se mostra coerente. Enquanto o traço do tensor energia-momento é uma função polinomial do tempo, a variação $R_1(t)$ do escalar de Ricci tem uma dependência exponencial nesse fator.

No limite $(m/\gamma)^2 \gg 1$, a solução (5.8) tende a soma de uma exponencial real crescente com uma exponencial real decrescente no tempo. Logo, ou as condições de contorno são

ajustada para satisfazer a fórmula $A = 0$, ou essa igualdade prevê uma divergência exponencial do escalar de Ricci, com relação ao comportamento previsto pela Relatividade Geral. A solução (5.8) não permite concluir que o modelo (5.3) prevê uma divergência no escalar de Ricci, pois o método perturbativo perde a validade no limite $R_1 \gg 1$. Entretanto é possível afirmar que a fase dominada pela matéria não relativística é instável.

De fato, as expressões (2.11) e (2.45), presentes no capítulo (2), demonstram, em modelos $f(R)$ que obedecem as desigualdades $f_R > 0$ e $f_{RR} < 0$, a existência de uma divergência num dos autovalores positivos da matriz jacobiana (2.40), no único ponto fixo capaz de originar uma fase dominada pela matéria não relativística. Essa é a instabilidade exibida, de forma clara, no resultado (5.8).

Modelos $f(R)$ mais genéricos são parametrizado pela função adimensional $m(R) = h(R)/R_0$, conforme visto a seguir

$$f(R) = R + R_0 \frac{h(R)}{R_0}. \quad (5.9)$$

Em $R = R_0$, $m(R) \sim 1$. Mediante o uso das hipóteses (5.1) e (5.2), o traço (1.16) das equações de campo equivale, de forma geral, à equação de evolução

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu R_1(r, t) - 2\kappa^2 \left(\frac{\partial^2 m(R)}{\partial t^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^3 m(R)}{\partial t^3} \right) \partial_\mu T \partial^\mu R_1(r, t) \\ + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 m(R)}{\partial t^2} \right)^{-1} \left[\frac{R_1(r, t)}{R_0} - \frac{\partial m(R)}{\partial t} (R_1(r, t) - \kappa^2 T) + m(R) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

para a perturbação, R_1 , do escalar de Ricci (Faraoni 2006). Na expressão acima, a contribuição preponderante do termo de massa, proporcional a $R_1(r, t)$, é dada pelo fator inversamente proporcional à constante $R_0 \sim R_{\text{dS}}$. Supondo uma dependência puramente temporal do escalar de Ricci e do tensor de energia-momento, essa igualdade é análoga à equação diferencial de um oscilador harmônico com amortecimento e com frequência natural puramente imaginária, desde que a variação temporal do traço do tensor energia momento seja desconsiderada. Portanto, ela também prediz um crescimento exponencial da perturbação $R_1(t)$.

Os resultados enunciados permitem afirmar que soluções, na cosmologia, compatíveis com a dinâmica prevista pela teoria da Relatividade Geral, são instáveis em modelos $f(R)$ dotados de uma derivada f_{RR} negativa. Em particular, essa demonstração permitiu generalizar a

relação, estabelecida no capítulo 2, entre esse sinal e a existência de uma fase dominada pela matéria não relativística. De acordo com Sawicki & Hu (2007), existe uma demonstração alternativa, apta a fornecer não só uma visão física intuitiva da dinâmica determinada por esses modelos, como também a demonstração da existência dessas soluções instáveis. Para enunciá-la, a equivalência entre teorias $f(R)$ e do tipo escalar-tensorial é pressuposta. Além disso, a moldura de Einstein é empregada.

Em teorias $f(R)$, a derivada do potencial $V(\phi)$, com $\phi = -\sqrt{2/3}\ln(\chi)$ e $\chi = f_R$, presente na equação de campo (1.32), é igual a (Sawicki & Hu 2007, Faulkner et al. 2007)

$$\frac{dV(\phi)}{d\phi} = \frac{R(1 - h_R) - 2h(R)}{(1 + h_R)^2}. \quad (5.11)$$

Na equação (1.32), o comportamento do campo ϕ é determinado pelo potencial efetivo, V_{eff} . Em concordância com resultados a serem demonstrados em um capítulo posterior, para satisfazer os testes clássicos da gravitação, é absolutamente necessário obedecer os vínculos

$$h(R) \ll R \quad \text{e} \quad h_R \ll 1, \quad (5.12)$$

no limite $\phi \rightarrow 0$. Nesse caso, é simples demonstrar que a derivada do potencial efetivo,

$$\frac{dV_{\text{eff}}(\phi)}{d\phi} = \frac{R(1 + h_R) - 2h(R)}{(1 + h_R)^2} - \frac{2\kappa^2}{\sqrt{6}} e^{-2\phi/\sqrt{6}} \rho, \quad (5.13)$$

se anula no ponto $R \approx \kappa^2 \rho$. Para determinar a estabilidade desse ponto, é necessário calcular a derivada segunda desse potencial, com relação ao campo escalar ϕ .

Em concordância com a discussão exibida no capítulo 3.3, no limite $\phi \rightarrow 0$, o termo proporcional a densidade do meio não é relevante e, portanto,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}(\phi)}{d\phi^2} \right|_{R \approx \kappa^2 \rho} &\approx \left. \frac{d^2 V(\phi)}{d\phi^2} \right|_{R \approx \kappa^2 \rho} \\ &\approx h_{RR} \left(\frac{(1 + h_R) - Rh_{RR}}{(1 + h_R)^2} \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Considerando $1 + h_R > 0$ e $h_{RR} < 0$, esse ponto crítico equivale a um máximo local e, por consequência, a solução é instável.

Além do vínculo $f_{RR} > 0$, modelos $f(R)$ viáveis devem obedecer a desigualdade $f_R > 0$.

A demonstração dessa afirmação não é exibida (Faraoni 2006). Contudo, é possível afirmar nesse sentido que no limite quase estático, obtido a partir da não consideração das derivadas temporais de todas as grandezas geométricas em ordem zero, a equação de perturbação (4.53) tende a

$$\frac{\partial^2 \tilde{\delta}}{\partial \eta^2} + H(\eta) \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial \eta} - \frac{1 + 4 \frac{k^2}{a^2} \frac{f_{RR}}{f_R}}{1 + 3 \frac{k^2}{a^2} \frac{f_{RR}}{f_R}} \frac{4\pi G a(\eta)^2 \tilde{\delta}}{f_R} = 0. \quad (5.15)$$

Nos casos em que $f_R < 0$, o termo proporcional à sobredensidade *délt*a pode assumir valores positivos, o que é um absurdo do ponto de vista físico, pois isso equivale a admitir uma constante gravitacional efetiva inferior à zero.

Capítulo 6

Singularidades na evolução cosmológica

Neste capítulo, a dinâmica do campo f_R , que corresponde a um efetivo grau de liberdade nas teorias $f(R)$, é examinada no contexto da cosmologia. Assim, o elemento de linha

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (6.1)$$

é adotado. No sistema de coordenadas utilizado, o parâmetro t não equivale ao tempo conforme.

No capítulo 2, foi demonstrada a existência de diversos modelos que não prevêem a existência uma fase dominada pela matéria não relativística, seguida por uma fase acelerada e precedida por uma fase dominada pela radiação. Entretanto, algumas funções bastante semelhantes à lagrangiana de Einstein-Hilbert, acrescida de uma constante cosmológica, no limite de $R/R_0 \gg 1$ possuem uma dinâmica promissora (Hu & Sawicki 2007a, Starobinsky 2007, Amendola, Gannouji, Polarski & Tsujikawa 2007).

A análise apresentada neste capítulo é restrita ao estudo de modelos $f(R)$ viáveis com relação aos vínculos cosmológicos relacionados no parágrafo anterior. De forma adicional, esse estudo é restrito a formas funcionais da lagrangiana semelhantes à de Einstein-Hilbert, acrescida de uma constante cosmológica. Em particular, o modelo

$$f(R) = R - \frac{\alpha R_0}{1 + \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-n}} \quad (6.2)$$

pertence a esse grupo de funções, desde que os parâmetros α e R_0 obedeçam os vínculos $\alpha > 0$

e $R_0 \sim \kappa^2 \rho_0$. A variável ρ_0 é igual à densidade de energia da soma de todos os constituintes do universo em $z = 0$ por definição (Hu & Sawicki 2007a). Além desse exemplo, a função

$$f(R) = R - \alpha R_0 \left(\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right)^n} - 1 \right), \quad (6.3)$$

proposta em Starobinsky (2007), também é viável. Nesse caso, também é indispensável a restrição dos parâmetros α e R_0 , mediante as expressões $\alpha > 0$ e $R_0 \sim \kappa^2 \rho_0$. Por último, o exemplo

$$f(R) = R - \alpha R_0 (1 - e^{-R/R_0}) \quad (6.4)$$

também é analisado, sob as mesmas hipóteses para α e R_0 (Linder 2009).

Os modelos apresentados acima não constituem uma lista exaustiva de todas as possibilidades viáveis e semelhantes, no limite $R \gg R_0$, à lagrangiana de Einstein-Hilbert, acrescida de uma constante cosmológica (Appleby & Battye 2007, Appleby & Battye 2008). De maneira geral, esses modelos compartilham as seguintes características:

1. $\lim_{R \rightarrow 0} f(R) = R,$ (6.5)

2. $\lim_{R \rightarrow \infty} f(R) = R - 2\Lambda,$ (6.6)

3. $f_R(R \approx R_0) = \left. \frac{df(R)}{dR} \right|_{R \approx R_0} \ll 1.$ (6.7)

Além dessas propriedades, as derivadas f_R e f_{RR} são positivas, ao menos no intervalo de valores do escalar de Ricci acessível à dinâmica na cosmologia. Apesar de existir um domínio, nas proximidades de zero, em que a derivada f_{RR} assume valores negativos nos modelos (6.2) e (6.3), ele é intangível, pois a evolução do universo se estabiliza numa métrica do tipo de Sitter com um valor para o escalar de Ricci superior ao limite desse intervalo de instabilidade.

A evolução dinâmica dos exemplos apresentados é investigada por intermédio do traço (1.16) das equações de campo, aplicado à métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Por meio da definição $\phi := f_R - 1$, é possível demonstrar a equivalência, no contexto da cosmologia, entre a equação (1.16) e a expressão (Frolov 2008)

$$\nabla_\mu \nabla^\mu f_R = \frac{d\phi^2}{dt^2} + 3H(t) \frac{d\phi}{dt} = \frac{dV(\phi)}{d\phi} - \mathcal{F}. \quad (6.8)$$

Nessa expressão, a derivada do potencial $V(\phi)$, com respeito ao campo escalar ϕ , é igual a

$$\frac{dV(\phi)}{d\phi} = \frac{(2f(R) - Rf_R)}{3}. \quad (6.9)$$

Além disto, a variável

$$\mathcal{F} = \frac{8\pi G}{3} (\rho - 3p) \quad (6.10)$$

representa a força originada do traço do tensor energia-momento.

Para os modelos (6.2), (6.3) e (6.4), o potencial $V(\phi)$ é concebido por meio de um gráfico paramétrico $V(R) \times \phi(R)$. A função $V(R)$, por sua vez, é obtida a partir da integração da derivada dV/dR , que está relacionada com a equação (6.9) por intermédio da igualdade (Frolov 2008)

$$\frac{dV(\phi(R))}{dR} = \frac{dV(\phi)}{d\phi} \frac{d\phi}{dR} = \frac{(2f(R) - Rf_R)}{3} \frac{d^2 f(R)}{dR^2}. \quad (6.11)$$

A figura 6.1 exhibe o perfil do potencial $V(\phi)$ previsto pelo modelo (6.3). Essa função admite diversas imagens associadas ao mesmo valor, no domínio, do campo ϕ e isso é um problema em princípio. Contudo, o intervalo $\phi > 0$ não é relevante do ponto de vista físico, pois equivale a valores negativos do escalar de Ricci. Além disso, a imagem associada à região $R > 0$ é subdividida em dois ramos distintos. No primeiro, a derivada f_{RR} é negativa. Em contrapartida, o segundo ramo está relacionado a valores positivos dessa função.

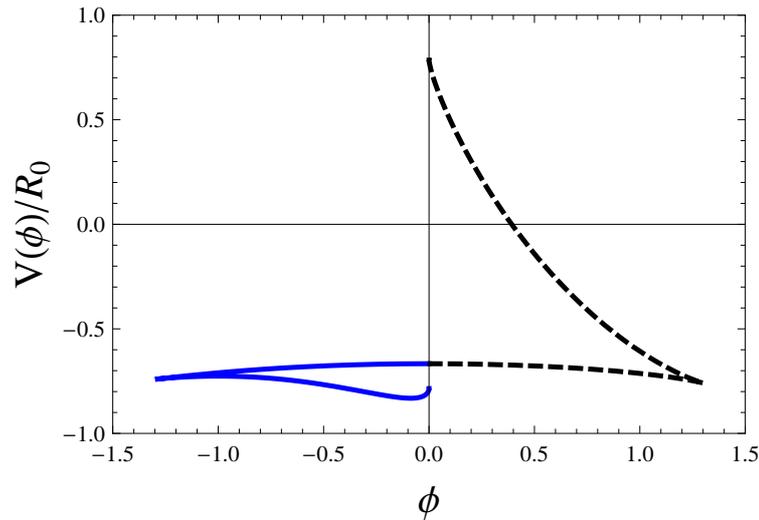


Figura 6.1: Perfil do Potencial $V(\phi)/R_0$ previsto pelo modelo (6.3), considerando $\alpha = 2$ e $n = 1$. A curva preta e tracejada corresponde à imagem desse potencial, para valores negativos do escalar de Ricci. Essa é, portanto, uma região inaceitável do ponto de vista físico. Já a curva azul e contínua equivale à imagem do potencial $V(\phi)/R_0$, impondo, no domínio, valores não negativos para o escalar de Ricci e, como consequência, fisicamente aceitável, do escalar de Ricci. Todavia, parte dessa curva está associada à soluções instáveis, pois existe um região em que a derivada f_{RR} é negativa (Frolov 2008).

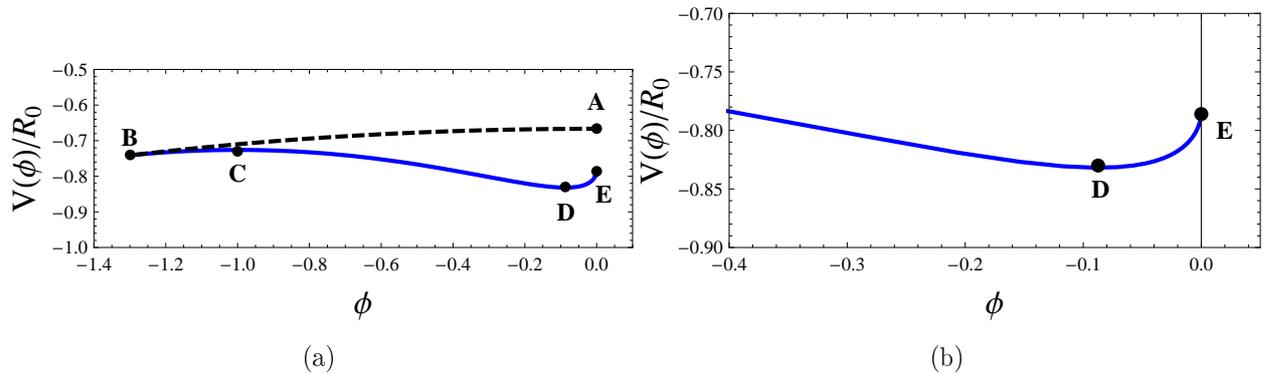


Figura 6.2: Perfil do potencial $V(\phi)/R_0$, restrito ao intervalo $R > 0$, previsto pelo modelo (6.3), presumindo $\alpha = 2$ e $n = 1$. Na figura 6.2a, as letras A, C e D indicam pontos críticos do potencial $V(\phi)$. A letra B, por sua vez, indica um ponto em que a derivada f_{RR} é nula. Além disso, a letra E corresponde a um ponto singular no escalar Ricci. Nessa mesma figura, a curva preta exibe a imagem do potencial $V(\phi)/R_0$ no domínio de valores em que a derivada f_{RR} é negativa. Assim sendo, a curva azul contínua, ampliada na figura 6.2b, apresenta a única região fisicamente relevante (Frolov 2008).

Os potenciais previstos pelos modelos (6.2) e (6.4) apresentam um perfil semelhante ao descrito nas figuras 6.1, 6.2a e 6.2b. Os gráficos 6.3 e 6.4 exibem as regiões de interesse físico desses respectivos exemplos. Mediante uma análise dessas imagens, é possível assimilar a

notável proximidade existente entre o ponto crítico D e a singularidade, localizada no ponto E.

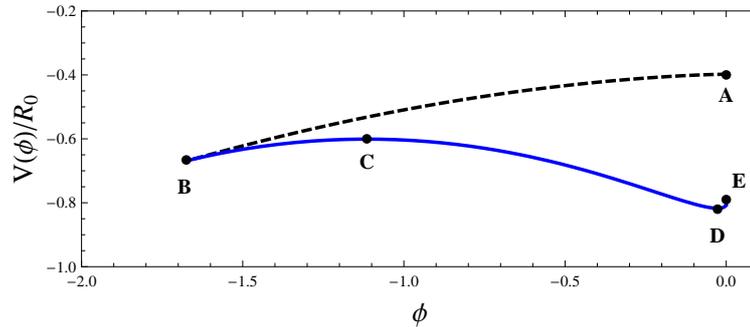


Figura 6.3: Perfil do potencial $V(\phi)/R_0$, restrito ao intervalo $R > 0$, previsto pelo modelo (6.2), na situação em que $\alpha = 2$ e $n = 3$. As letras A, C e D indicam pontos críticos do potencial $V(\phi)/R_0$. A letra B, por sua vez, nomeia o ponto em que a derivada f_{RR} é nula. Já a letra E corresponde à singularidade, isto é, a um ponto em que o escalar de Ricci adquire valor infinito. Nessa mesma figura, a curva preta explicita a imagem do potencial $V(\phi)/R_0$ no domínio de valores para o escalar de Ricci em que a derivada f_{RR} é negativa. Desse modo, a curva azul e contínua apresenta a única região do potencial fisicamente relevante.

A igualdade (6.8) pode ser interpretada como a equação de movimento de uma partícula pontual sujeita às leis da mecânica clássica. Nessa compreensão, duas forças delimitam a dinâmica do campo escalar. A primeira força é induzida pelo potencial e a segunda é produzida pela presença de matéria. As formas funcionais dessas interações são apresentadas nas expressões (6.9) e (6.10). No limite $\phi \rightarrow 0$, o potencial $V(\phi)$ possui um perfil patológico, pois a derivada dessa função tende a infinito, apesar do valor finito do potencial nesse respectivo ponto. Logo, é mais interessante investigar a dinâmica dessas interações por intermédio de um balanço energético.

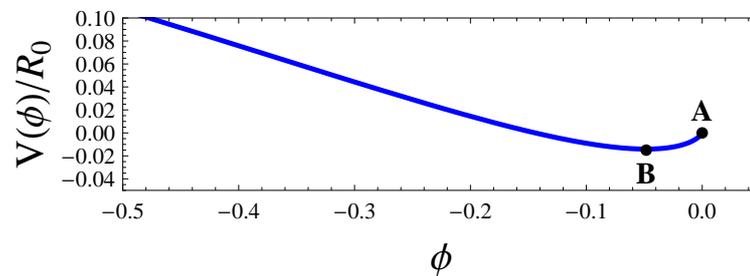


Figura 6.4: Perfil do potencial $V(\phi)/R_0$, restrito ao intervalo $R > 0$, previsto pelo modelo (6.4), na situação em que $\alpha = 2$. A letra B indica a solução de vácuo do tipo de Sitter. Já a letra E explicita a singularidade, isto é, o ponto em que o escalar de Ricci adquire valor infinito.

De acordo com Frolov (2008), a singularidade é acessível de forma dinâmica nesse conjunto de modelos. Corroborando essa afirmação, Appleby & Battye (2007) identificam, durante a evolução cosmológica do modelo (6.2), divergências no escalar Ricci, tanto em nível perturbativo, utilizando equações de campo linearizadas, quanto em nível numérico, integrando as equações completas.

Contudo, alguns comentários relevantes, com relação às conclusões enunciadas em Appleby & Battye (2007), necessitam ser discutidos. Em primeiro lugar, o método perturbativo despreza o efeito camaleão, que pode exercer um papel relevante na análise do sistema, pois ele tende a fixar o campo escalar no mínimo do potencial efetivo, afastando-o da singularidade. Em segundo lugar, as divergências obtidas por esse procedimento não são consistentes, pois a análise perturbativa deixa de ser válida para grandes variações do escalar de Ricci, em comparação ao valor desse campo na solução de vácuo.

Por último, a evolução numérica do sistema de equações de campo é, nesse trabalho, calculada no sentido temporal inverso. Portanto, as condições iniciais são estipuladas em $z = 0$ e o sistema evolui em direção ao limite $z \rightarrow \infty$. Contudo, não é evidente que a dinâmica desse conjunto de equações seja reversível. De fato, Oyaizu (2008), Oyaizu et al. (2008) e Schmidt et al. (2009) realizam simulações numéricas da evolução cosmológica prevista pelo modelo (6.2) no sentido direto do tempo, incluindo a dinâmica de formação de estruturas, e não obtêm singularidades no escalar de Ricci.

No entanto, é possível afirmar que a inexistência de singularidades nessas simulações é consequência das hipóteses impostas, especialmente com relação à validade do regime quase estático, em que as derivadas temporais de todas as perturbações das grandezas físicas e geométricas são desprezadas. Uma análise estatística do número de condições iniciais, impostas em $z \rightarrow \infty$, que prevêm uma evolução singular, é necessária para enunciar conclusões mais satisfatórias (Appleby & Battye 2007).

O estudo da formação de estruturas também é essencial para delimitar a acessibilidade das singularidades no escalar de Ricci, pois a densidade de energia de matéria não relativística é bastante elevada nessas regiões, em comparação com a densidade crítica do universo, e uma concentração de matéria tende a aproximar o campo escalar desse ponto singular. Para modelar esse problema, é indispensável considerar o campo ϕ dependente das coordenadas espaciais, conforme feito nas simulações apresentadas em Oyaizu (2008), Oyaizu et al. (2008)

e Schmidt et al. (2009).

Em Frolov (2008), a influência do processo de formação de estruturas é estimada por meio da linearização do traço das equações de campo. Nesse regime, é possível obter essa expressão a partir da expansão (3.22) e da igualdade (3.37). Além disso, o limite quase estático é pressuposto. Assim sendo, para $R \gg R_0$, essa equação tende a

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi(\vec{x}) \approx \nabla^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\kappa^2 \rho(\vec{x})}{3}. \quad (6.12)$$

Na equação (6.12), a métrica, cujas componentes são funções complicadas no interior das diferentes estruturas, foi simplificada. Em particular, o fator de escala foi aproximado pelo seu valor em $z = 0$. A semelhança funcional dessa expressão com a equação de Poisson, que determina a dinâmica do potencial newtoniano, nomeado $\Phi(\vec{x})$, de acordo com as leis da mecânica clássica, permite relacioná-las (Frolov 2008). Por conseguinte, é possível obter o campo ϕ como função desse potencial, conforme exibido na equação

$$\nabla^2 \Phi(\vec{x}) = -4\pi G \rho(\vec{x}) \Rightarrow \phi(\vec{x}) = \phi_\infty - \frac{2}{3} \frac{\kappa^2 \Phi(\vec{x})}{G}. \quad (6.13)$$

Em estrelas relativísticas, o potencial Φ , que é adimensional no sistema de unidades em que $c = 1$, é, de forma aproximada, igual a $\Phi \approx 4 \times 10^{-1}$. A variação permitida para o campo ϕ é, desse modo, igual a

$$|\delta\phi_{\max}| \sim 2.7 \times 10^{-1}. \quad (6.14)$$

Esse é um valor muito superior à distância entre o mínimo do potencial $V(\phi)$ e a singularidade, ao menos para os modelos $f(R)$ descritos nesta sessão. Em particular, no exemplo (6.3), essa diferença é menor ou igual a 9×10^{-2} , supondo $\alpha \gtrsim 1$ e $n \gtrsim 1$, conforme visto na figura que se segue.

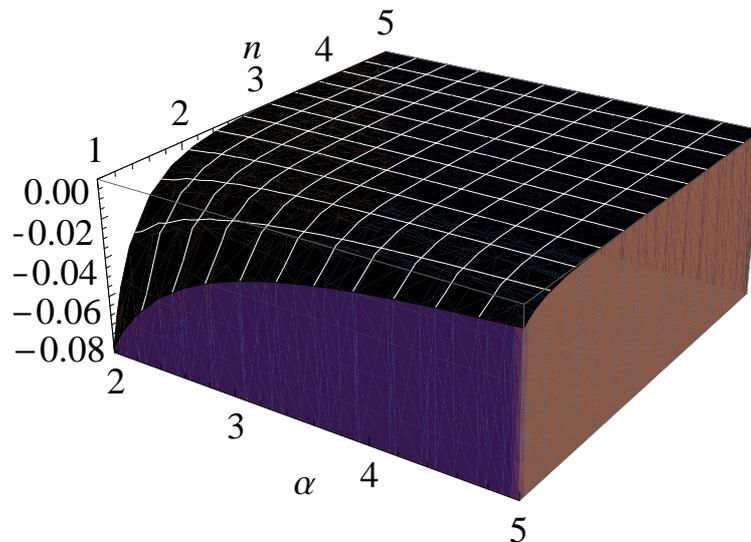


Figura 6.5: A figura acima apresenta a diferença $\Delta\phi$, prevista pelo modelo (6.3), entre o valor do campo no mínimo do potencial $V(\phi)$ e $\phi = 0$, que corresponde à singularidade no escalar de Ricci, como função dos parâmetros α e n (Dev et al. 2008).

Apesar da estimativa (6.13) não ser conclusiva, face à razões que são melhor discutidas no final desta sessão, a presença de singularidades, na evolução da cosmologia, pode ser evitada por intermédio da adição de termos proporcionais a R^n , com $n > 1$. Por serem influentes no regime $R/R_0 \gg 1$, essas correções são denominadas ultravioletas. Por simplicidade, apenas o caso particular $n = 2$ (Dev et al. 2008) é considerado nesta dissertação. Corroborando essa escolha, a inclusão, na lagrangiana de Einstein-Hilbert, de um termo proporcional ao quadrado do escalar de Ricci foi motivada, na década de 80, para a construção de modelos inflacionários (Starobinsky 1980).

A presença de uma correção ultravioleta modifica, de forma significativa, o perfil do potencial $V(\phi)$. Com esses termos, o campo ϕ tende a infinito no limite $R \rightarrow \infty$, diferentemente dos modelos infravermelhos em que ele tende a zero. Por consequência, a perigosa proximidade entre o valor do escalar de Ricci na solução de vácuo e a singularidade não mais existe. Além disso, o valor do potencial também tende a infinito nesse mesmo limite, criando uma barreira infinita que impede o alcance desse ponto singular.

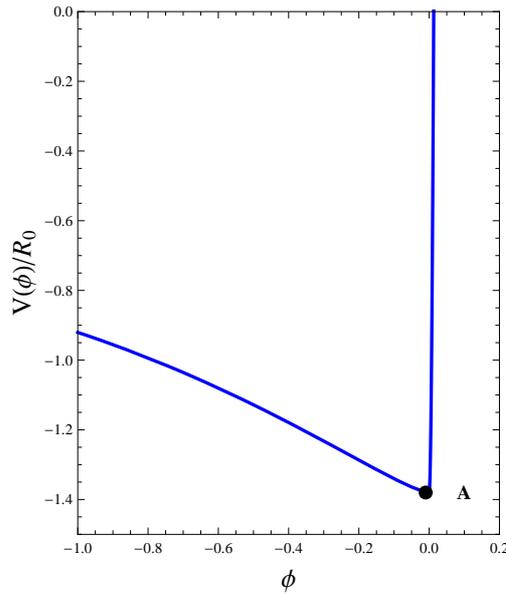


Figura 6.6: Potencial $V(\phi)$ previsto pelo modelo (6.3) acrescido da correção R^2/μ , supondo $\alpha = 2$, $n = 1$ e $\mu^{-1} = 1 \times 10^{-5} R_0^{-1}$. A imposição $R_0/\mu \ll \alpha$ é necessária para manter, em concordância com as observações, as previsões desse modelo para nucleossíntese, Radiação Cósmitica de Fundo e formação de estruturas. Fonte: Dev et al. (2008).

Além da introdução de termos ultravioletas, tais como R^2/μ , existe uma outra maneira de criar modelos $f(R)$ livre do problema referente à existência de singularidades na evolução cósmica. De acordo com Miranda et al. (2009b), existem modelos não singulares, cujas correções, na lagrangiana, são subdominantes no limite $R/R_0 \gg 1$. Para evitar a existência desse problema, é indispensável que a barreira do potencial $V(\phi)$, separando a solução de vácuo do ponto singular, tenha uma altura infinita.

Para compreender quais são os vínculos, na forma funcional da lagrangiana, originados dessa imposição, é conveniente examinar o potencial $V(R)$ no contexto das teorias escalar-tensorial. Em particular, a moldura de Einstein é adotada. Nela, o potencial V_E é igual a

$$V_E(\tilde{R}) = \frac{1}{2\kappa^2} \frac{\tilde{R}\tilde{h}_R - \tilde{h}(R)}{(1 + \tilde{h}_R)^2}. \quad (6.15)$$

No limite $\phi \rightarrow 1$, o perfil desse potencial é semelhante ao previsto pela moldura de Jordan, simplificando a interpretação dos resultados. Portanto, os superíndices " \sim " são abolidos.

Mediante a análise da expressão (6.15), é possível afirmar que existem duas maneiras de satisfazer o limite $\lim_{R \rightarrow \infty} V_E(R) \rightarrow \infty$, nos casos em que o campo $f_R = 1 + h_R$ assume apenas

valores positivos. Por um lado, o termo Rh_R pode obedecer o limite $\lim_{R \rightarrow \infty} (Rh_R) \rightarrow \infty$. Por outro lado, a função $h(R)$ pode tender a infinito nesse mesmo limite. No primeiro caso, por intermédio de ajuste de parâmetros, há uma consonância entre o modelo $f(R)$ proposto e os vínculos (6.5), (6.6) e (6.7). No segundo, contudo, a propriedade (6.6) é violada.

De acordo com Miranda et al. (2009b), mesmo uma alteração na lagrangiana, com relação à de Einstein-Hilbert, que não tenda a uma constante no limite $R \rightarrow \infty$, pode ser subdominantes nesse regime de alta curvatura. Conforme exemplificado nesse trabalho, é possível satisfazer o vínculo

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{h(R)}{R} \rightarrow 0, \quad (6.16)$$

que define se um modelo é dotado ou não de correções ultravioletas, mesmo no caso em que $h(R) \rightarrow \infty$. Para exemplificar esse argumento, Miranda et al. (2009b) consideram o exemplo

$$f(R) = R - \alpha R_0 \beta \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{R}{R_0} \right)^n \right]^{-\frac{1}{\beta}} \right\}. \quad (6.17)$$

Nesse caso, a altura da barreira de potencial é diretamente proporcional ao valor do parâmetro β . Além disso, é interessante notar que essa função generaliza uma série de modelos analisados anteriormente nesta dissertação. Para $\beta = -1$, o modelo (2.52) é obtido. Já para $\beta = 1$, essa função equivale a o exemplo (6.2). Por último, para $\beta = 1$ e $n = 2$ o modelo (6.2) é encontrado como caso particular. Logo, essa dissertação espera demonstrar que modelos $f(R)$ contidos na forma generalizada pela função (6.17) são promissores, aptos a produzir uma evolução cosmológica adequada, incluindo o espectro de potências, e a concordar com os testes clássicos da gravitação. Por último, também será demonstrado que o limite $\beta \rightarrow \infty$ dessa expressão é capaz de solucionar o problema referente à singularidade descrita por (Frolov 2008). Nesse limite, essa função tende a

$$f(R) = R - \alpha R_0 \ln \left(1 + \frac{R}{R_0} \right). \quad (6.18)$$

A função acima possui uma derivada f_R estritamente positiva. A derivada primeira pode adquirir valores negativos, mas esses intervalos instáveis não são acessíveis de forma dinâmica, num comportamento análogo ao obtido pelas expressões (6.2) e (6.3). O vínculo

(6.5) também é satisfeito, mas a propriedade (6.7) não o é, necessariamente. De fato, nesse exemplo, o melhor ajuste de parâmetros prevê $f_R \approx 7.5 \times 10^{-1}$, valor muito inferior ao esperado pelos modelos (6.2) e (6.3).

A figura 6.7 apresenta o cálculo do potencial $V(\chi)$ para os modelos (6.2), (6.3) e (6.18). Esse potencial também é obtido por meio de uma mudança de variáveis na equação (6.9). A barreira infinita, exibida nessa figura, é uma típica forma funcional apta a originar uma evolução cosmológica não singular (Miranda et al. 2009b). Entretanto a presença dessa barreira, em modelos infravermelhos, os torna incompatíveis com os testes clássicos da gravitação (Thongkool, Sami, Gannouji & Jhingan 2009).

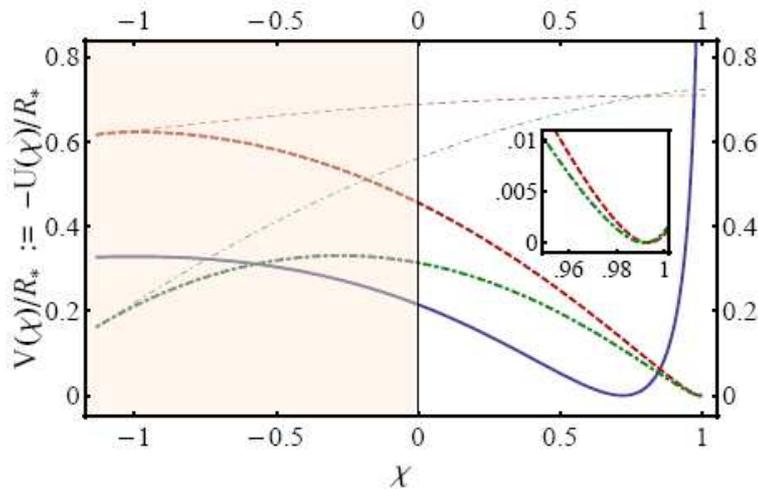


Figura 6.7: Na figura acima, os potenciais $V(\chi)$, com $\chi = f_R = \phi + 1$, previstos pelos modelos (6.2), (6.3) e (6.18), são expostos. A curva tracejada em vermelho equivale à previsão do modelo (6.2), supondo $n = 2$ e $\alpha = 2$. A curva tracejada em verde corresponde ao potencial previsto pelo modelo (6.3), pressupondo $n = 2$ e $\alpha = 1$. Por último, a curva azul cheia indica o potencial obtido a partir do exemplo (6.18), considerando $\alpha = 1$. Fonte: Miranda et al. (2009b).

Independente da validade das soluções propostas para o problema referente à existência de singularidades na evolução cosmológica, uma crítica pode ser formulada com relação à estimativa (6.14), pois esse resultado pressupõe a linearização das equações de campo. Logo, o efeito camaleão não é considerado e, conforme já mencionado, ele tende a impedir o campo ϕ de alcançar a singularidade, segurando-o no mínimo do potencial efetivo.

A compreensão, nos casos em que os vínculos (6.5), (6.6) e (6.3) são satisfeitos, do papel desempenhado pelo efeito camaleão pode ser elucidada. Para simplificar esse estudo, apenas

a presença de matéria não relativística é, de forma perturbativa, considerada. O traço das equações de campo nesse caso é de forma aproximada, igual a

$$\nabla^2\phi(\vec{x}) = \frac{a(t)^2 (\delta R(\phi(\vec{x})) - \kappa^2\delta\rho(\vec{x}))}{3} \quad (6.19)$$

no limite $R \gg R_0$.

A demonstração dessa equação é apresentada no capítulo (8). Os parâmetros δR e $\delta\rho$ representam perturbações com respeito à solução de vácuo. De maneira análoga à discussão exibida em Frolov (2008), uma distribuição de matéria esfericamente simétrica e espacialmente limitada é pressuposta. Como condição de contorno no infinito, o campo ϕ obedece a igualdade $\phi = \phi_{\text{ds}}$. Nas escalas em que o efeito Camaleão é atuante, o escalar de Ricci é, de forma aproximada, igual a $\delta R \approx \kappa^2\delta\rho$ e, assim, a expressão (6.19) tende à equação de Laplace. Essa afirmação implica, em virtude das condições de contorno, a validade da equação $\phi \approx \phi_{\text{ds}}$ em todo ponto, mesmo na presença de matéria.

Em oposição à Frolov (2008), defensor da irrelevância dos efeitos não lineares em regiões com densidades de energia muito inferiores à encontrada em objetos compactos, Oyaizu et al. (2008) demonstram que o efeito Camaleão é bastante atuante nas estruturas presentes em escalas de distância da ordem de grandeza de 1×10 Mpc. Por consequência, a validade da equação linearizada (6.13) é muito mais limitada do que inicialmente considerado. Ao invés de extrapolá-la para $\Phi \approx 4 \times 10^{-1}$, é necessário considerar apenas valores do potencial newtoniano inferiores à intensidade média presente nessas perturbações.

Por fim, é importante ressaltar a importância da análise da presença de singularidades na evolução cosmológica, motivadora da inclusão de correções ultravioletas em modelos até então viáveis. No entanto, ainda não é claro se uma singularidade no escalar de Ricci pode, de fato, ser alcançada de forma dinâmica, mesmo em exemplos dotados de uma barreira de potencial finita, separando a solução de vácuo do ponto singular. Em particular, não é evidente se o efeito camaleão é passível de manter, para valores de densidade de energia da ordem de grandeza do que a densidade crítica do universo em $z = 0$, o campo suficiente próximo do mínimo desse potencial.

Uma maneira de testar as consequências do efeito camaleão consiste em parametrizar o comportamento da variação δR em função do fator $\delta\rho$. Para densidades de energia da

ordem de grandeza da densidade crítica do universo em $z = 0$, a desigualdade $\delta R \ll \kappa^2 \delta \rho$ é satisfeita. Todavia, para densidades muito maiores, a expressão $\delta R \approx \kappa^2 \delta \rho$ é válida. Por conseguinte, a parametrização

$$\delta R = -\kappa^2 \delta \rho (1 - \alpha e^{-\beta(\delta \rho / \rho_0)}) , \quad (6.20)$$

deve ser apta a simular esse perfil. Os termos α e β são adimensionais e o valor do parâmetro ρ_0 é da ordem de grandeza da densidade de energia de todas as componentes que constituem o universo em $z = 0$.

A solução da equação (6.19), com δR descrito pela igualdade (6.20), em conjunto com o vínculo $|\delta \phi_{\max}| \leq 1 - \phi_{\text{dS}}$, pode restringir os valores desses parâmetros. As simulações, em contrapartida, fornecem os melhores ajustes da parametrização (6.20) para diferentes modelos. Logo, é possível determinar se as soluções cosmológicas são singulares, mesmo na presença do efeito camaleão, a partir do nível de discrepância existente entre os valores α e β exigidos para satisfazer a desigualdade $|\delta \phi_{\max}| \leq 1 - \phi_{\text{dS}}$ e para ajustar diferentes modelos infravermelhos.

Capítulo 7

Existência de Estrelas Relativísticas

7.1 Introdução

Neste capítulo, a problemática relativa à existência de estrelas relativísticas, em teorias $f(R)$, é analisada. Essa primeira exposição do problema não abrange todo o desenvolvimento existente na literatura. Assim sendo apenas os artigos referentes à descoberta da possível inexistência desses astros, além de algumas soluções propostas, são abordados nos parágrafos posteriores.

Com o objetivo de utilizar alguns resultados apresentados em Kobayashi & Maeda (2008) e em Kobayashi & Maeda (2009), as equações de campo com índices mistos são adotadas. O elemento de linha (3.1), exibido no capítulo 3.1, é novamente postulado. A partir das componentes (3.6), (3.7), (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12), dos símbolos de Christoffel e do tensor de Ricci, as equações de campo são obtidas mediante uma manipulação algébrica elementar.

As expressões

$$\frac{\chi}{r^2} \left(-1 + B(r) + r \frac{dB(r)}{dr} \right) = -\kappa^2 \rho - \chi^2 V(\chi) - B(r) \left[\frac{d\chi^2}{dr^2} + \frac{d\chi}{dr} \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{2B(r)} \frac{dB(r)}{dr} \right) \right], \quad (7.1)$$

$$\frac{\chi}{r^2} \left(-1 + B(r) + \frac{rB(r)}{N(r)} \frac{dN(r)}{dr} \right) = \kappa^2 p - \chi^2 V(\chi) - B(r) \frac{d\chi}{dr} \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{2N(r)} \frac{dN(r)}{dr} \right), \quad (7.2)$$

equivalem às componentes 00 e 11 das equações de campo. Nelas, o campo χ é definido por meio da fórmula $\chi := f_R$. Além disso, o potencial, $V(\chi)$, é determinado a partir da expressão

$$V(\chi) = \frac{1}{2\chi^2} (\chi R(\chi) - f(R(\chi))) . \quad (7.3)$$

Em contrapartida, o traço das equações de campo é igual a

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla^\mu \chi &= B(r) \left[\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{d\chi}{dr} \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{2N(r)} \frac{dN(r)}{dr} + \frac{1}{2B(r)} \frac{dB(r)}{dr} \right) \right] \\ &= \frac{\kappa^2}{3} T + \frac{2\chi^3}{3} \frac{dV(\chi)}{d\chi} . \end{aligned} \quad (7.4)$$

Nessa equação, a derivada

$$\frac{dV(\chi)}{d\chi} = \frac{1}{2\chi^3} (2f(R(\chi)) - \chi R(\chi)) \quad (7.5)$$

é calculada por intermédio dessa igualdade.

Obtida as equações determinantes da dinâmica dos campos $N(r)$, $B(r)$ e χ , as condições de contorno podem ser especificadas. Nas proximidades do centro da estrela, as expansões

$$\begin{aligned} N(r) &= 1 + N_2 r^2 + \mathcal{O}(r^3) , \\ B(r) &= 1 + B_2 r^2 + \mathcal{O}(r^3) , \\ \chi(r) &= \chi_c \left(1 + \frac{c_2}{2} r^2 \right) + \mathcal{O}(r^3) , \\ \rho(r) &= \rho_c + \frac{\rho_2}{2} r^2 + \mathcal{O}(r^3) , \\ p(r) &= p_c + \frac{p_2}{2} r^2 + \mathcal{O}(r^3) . \end{aligned} \quad (7.6)$$

são pressupostas. Os parâmetros χ_c , ρ_c e p_c representam, respectivamente, os valores centrais do campo escalar χ , da densidade de energia de matéria não relativística e a pressão isotrópica. Por fim, o escalar de Ricci é igual a $R = R_c + \mathcal{O}(r^2)$, com $R_c = -6(B_2 + N_2)$.

As variáveis, exibidas nas expansões (7.6), não são totalmente independentes, pois estão relacionadas pelas equações (7.1), (7.2) e (7.4). No centro da estrela, estas igualdades pre-

vêm as expressões

$$3B_2 = -\frac{\kappa^2}{\chi_c} \rho_c - \chi_c V_c - 3c_2, \quad (7.7)$$

$$B_2 + 2N_2 = \frac{\kappa^2}{\chi_c} p_c - \chi_c V(\chi_c) - 2c_2, \quad (7.8)$$

$$3C_2 = \frac{\kappa^2}{3\chi_c} (-\rho_c + 3p_c) + \frac{2\chi_c^2}{3} \frac{dV(\chi)}{d\chi} \Big|_{\chi=\chi_c}. \quad (7.9)$$

A equação

$$p_2 + N_2 (\rho_c + p_c) = 0, \quad (7.10)$$

correspondente à conservação do tensor energia-momento, correlaciona os parâmetros p_2 , N_2 , ρ_c e p_c . Essas relações permitem integrar as equações de campo desde $r = 0$ até o raio \mathcal{R} da estrela, dado os valores dos parâmetros ρ_c , p_c e χ_c . Esse raio, por sua vez, é calculado por intermédio da imposição $p(\mathcal{R}) = 0$. Na região externa à estrela, essas equações também admitem uma solução que satisfaz à condição de contorno $\chi(r \rightarrow \infty) \rightarrow \chi_\infty$.

Antes de apresentar os resultados numéricos, o comportamento qualitativo das soluções das equações de campo é examinado, para permitir a obtenção de uma intuição física desse sistema. Nesse estudo, a analogia com a equação de movimento de uma partícula sob as leis da mecânica clássica é, novamente, utilizada. A coordenada radial, nesse contexto, é interpretada como um parâmetro temporal. Adicionalmente, o valor do campo equivale à posição desse ponto material. Desprezando, com o objetivo de simplificar a análise, os campos $N(r)$ e $B(r)$ presentes, de forma explícita, na expressão (7.4), essa equação dinâmica é suscetível a ser, de maneira equivalente, reescrita na forma

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\chi}{dr} = -\frac{dU(\chi)}{d\chi} + \mathcal{F}, \quad (7.11)$$

com,

$$\frac{dU(\chi)}{d\chi} = -\frac{2\chi^3}{3} \frac{dV(\chi)}{d\chi}. \quad (7.12)$$

A função $U(\chi)$ e a força \mathcal{F} , expostos nas igualdades acima, governam a dinâmica da partícula clássica. Enquanto, na cosmologia, a solução de vácuo corresponde ao mínimo do potencial (6.9), nas soluções estáticas e esfericamente simétricas, ela é alcançada no ponto de máximo local do potencial (7.12). De acordo com Kobayashi & Maeda (2008), o perfil singular do potencial (7.12) e a proximidade entre os valores do campo χ na solução de vácuo e na singularidade dificultam a formação de estrelas relativísticas no modelo (6.3). Em decorrência das semelhanças existentes entre o potencial previsto por esse modelo e as formas funcionais previstas pelas funções (6.2) e (6.4), os argumentos, discutidos nos parágrafos subsequentes, também são válidos nesses casos.

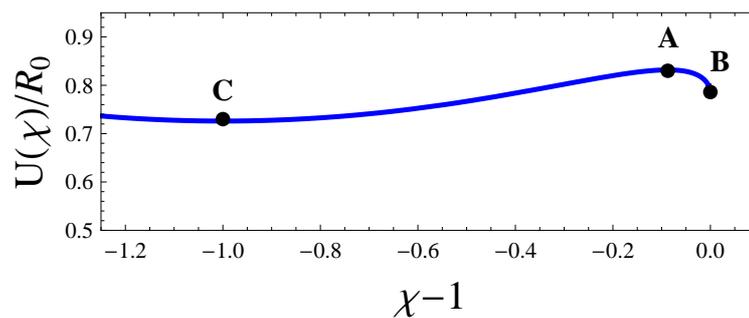


Figura 7.1: Gráfico, na região estável ($f_{RR} > 0$), do potencial $U(\chi)$ previsto pelo modelo (6.3), considerando $\alpha = 2$, $n = 1$. O ponto B indica a singularidade $R \rightarrow \infty$ e o ponto A corresponde a um ponto de máximo local do potencial $U(\chi)$, apto a gerar, na ausência da força \mathcal{F} , uma solução do tipo Schwarzschild de Sitter. Por último, o ponto C equivale a um mínimo local do potencial $U(\chi)$. De acordo com Kobayashi & Maeda (2008) uma solução em que a partícula clássica atravessa o ponto A, prosseguindo rumo ao ponto C, é singular, pois gera uma divergência no escalar $K := R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Inicialmente, o valor do campo χ , no centro da estrela, está situado entre os pontos A e B, exibidos na figura 7.1. De acordo com a expansão (7.6), o valor central da derivada do campo χ , com respeito a coordenada radial, é nulo. Portanto, a partícula parte da posição χ_c sem qualquer velocidade, o que torna seu movimento inicial completamente dependente da força resultante nesse ponto.

Por intermédio de uma análise da figura 7.2, é possível afirmar que a derivada do potencial $U(\chi)$ assume, entre os pontos A e B, valores negativos. Por consequência, o termo de

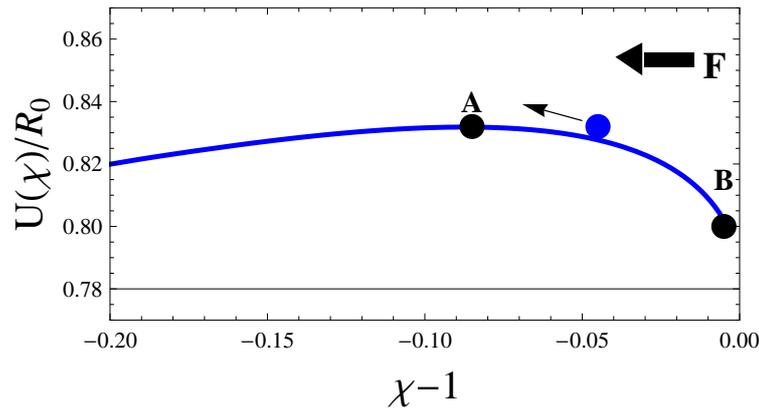


Figura 7.2: Gráfico ampliado do potencial $U(\chi)$ previsto o modelo (6.3), supondo $\alpha = 2$, $n = 1$. O ponto B indica a singularidade $R \rightarrow \infty$ e o ponto A corresponde a um máximo local do potencial $U(\chi)$, que é capaz de gerar uma solução do tipo Schwarzschild de Sitter. A partícula clássica, no interior da estrela, escala a barreira de potencial com auxílio da força \mathcal{F} . Fora da estrela, no entanto, a força \mathcal{F} cessa e, assim, o equilíbrio entre a energia cinética adquirida no interior da estrela e a diferença de potencial da barreira reminscente especificará o perfil da solução das equações de campo no limite $r \rightarrow \infty$.

força, $-dU(\chi)/d\chi$ impulsiona a partícula em direção à singularidade. Em contraposição, nos casos em que a desigualdade $\rho - 3p > 0$ é, em todo volume estelar, satisfeita, a força \mathcal{F} assume, exclusivamente, valores negativos, empurrando a partícula rumo ao máximo local do potencial $U(\chi)$.

A análise subsequente pressupõe uma densidade de energia $\rho(r)$ constante ao longo de toda a estrela. Segundo Babichev & Langlois (2009a) e Babichev & Langlois (2009b), essa hipótese implica a violação da desigualdade $\rho - 3p > 0$, originando um efeito catastrófico na dinâmica do escalar de Ricci. A mudança de sinal do traço do tensor energia-momento obriga a força \mathcal{F} a impulsionar o campo χ no sentido do ponto singular.

Nesse caso, o caráter divergente da solução das equações de campo é procedente da hipótese $\rho(r) = \rho_c \ \forall r < \mathcal{R}$, pois ela implica uma equação de estado fisicamente inaceitável. A implementação de perfis mais realísticos poderia resolver esse problema em princípio. Entretanto, Kobayashi & Maeda (2008) descrevem singularidades presentes em estrelas que respeitam o vínculo $\rho(r) - 3p(r) > 0 \ \forall r < \mathcal{R}$. Apesar da aparente distinção dos problemas relatados em Kobayashi & Maeda (2008) e em Babichev & Langlois (2009a), uma discussão mais detalhada sobre a possibilidade dos resultados, relatados no segundo trabalho, demonstrarem que os problemas, descritos no primeiro, resultam do sinal do traço do tensor energia-momento, é postergada. Anteriormente, é necessário exibir os resultados

apresentados em Upadhye & Hu (2009).

Conforme mencionado, a dinâmica do campo $\chi(r)$ depende, de forma fundamental, do valor do campo escolhido para a condição de contorno no centro da estrela. Isto equivale a enunciar, no contexto da analogia mecânica, a estrita dependência da partícula pontual com relação a sua respectiva posição inicial. O parâmetro χ_s é, portanto, definido como sendo igual ao valor do campo χ , pertencente ao intervalo compreendido entre os pontos A e B, exibidos na figura 7.2, que soluciona a equação (Kobayashi & Maeda 2008, Kobayashi & Maeda 2009)

$$\mathcal{F} - \frac{dU(\chi)}{d\chi} = 0. \quad (7.13)$$

Nos casos em que $\chi_s < \chi_c < 1$, a partícula clássica inicia seu movimento rumo à singularidade, conforme avança a coordenada radial. O valor da força \mathcal{F} é, dessa forma, insuficiente para permitir uma ascensão na barreira de potencial existente entre χ_c e o ponto de máximo. Como consequência, a solução para o escalar de Ricci é singular. Em contrapartida, se a variável χ_c é inferior ao parâmetro χ_s , então a força \mathcal{F} é dominante em $r = 0$ e, por consequência, a partícula escala a barreira visualizada na figura 7.2. Na região $r > \mathcal{R}$, a força \mathcal{F} cessa e a interação resultante passa a ser exercida pela derivada do potencial $U(\chi)$, com respeito ao campo escalar χ .

Na região externa à estrela, três situações distintas, para o movimento da partícula clássica, são possíveis. Em primeiro lugar, a energia cinética adquirida no interior da estrela por intermédio do trabalho exercido pela força \mathcal{F} pode ser insuficiente para vencer a barreira de potencial reminiscente fora da estrela. Nesse caso, a aproximação máxima do ponto de máximo desse potencial é não nula e a partícula retorna, em seguida, em direção à singularidade. A solução, nessa situação, também é singular.

Em segundo lugar, a partícula pode ganhar, no interior da estrela, uma quantidade de energia cinética exatamente igual à diferença de potencial existente na barreira a ser vencida na região externa à estrela. Assim,, a partícula tende ao máximo do potencial $U(\chi)$ no limite $r \rightarrow \infty$ e a condição de contorno, $\chi(r \rightarrow \infty) \rightarrow \chi_\infty$ é satisfeita. A solução é, por consequência, não singular.

Por último, a partícula pode obter uma quantidade de energia cinética superior à ne-

cessária para vencer a barreira de potencial existente na região externa à estrela. Nesse caso, ela atravessa o ponto de máximo local do potencial $V(\chi)$, conforme mostrado na figura 7.2. Essa é uma solução singular, afirmação demonstrada numericamente em Kobayashi & Maeda (2008). A partir dessas considerações, é possível concluir que, para uma determinada condição de contorno estabelecida no infinito, existe uma única solução não singular.

O parâmetro $\chi_{\text{crítico}}$ é igual, por definição, ao valor do campo χ , em $r = 0$, passível de originar uma solução bem comportada. Também é postulado, na análise qualitativa que se segue, a independência, no interior estelar, do tamanho \mathcal{R} do raio da estrela e do perfil de pressão $p(r)$ com relação à condição de contorno do campo χ . Por um lado, nas circunstâncias em que a desigualdade $\chi_c < \chi_{\text{crítico}}$ é satisfeita, a força resultante, no interior da estrela, é superior ao caso em que a igualdade $\chi_c = \chi_{\text{crítico}}$ é válida, em virtude do menor módulo da derivada $dU(\chi)/d\chi$. Além disso, a barreira reminiscente na região externa à estrela é, nessa situação, inferior a obtida no caso $\chi_c = \chi_{\text{crítico}}$. Por conseguinte, a energia cinética, adquirida pela partícula, é suficiente para atravessar o ponto de máximo local desse potencial.

Por outro lado, nos casos em que $\chi_c > \chi_{\text{crítico}}$, a força resultante, no interior da estrela, e a barreira reminiscente, na região externa à estrela, são, respectivamente, inferiores e superiores aos valores dessas grandezas calculados no caso em que a igualdade $\chi_c = \chi_{\text{crítico}}$ é satisfeita. Assim, a energia cinética auferida pela partícula não é suficiente para alcançar o ponto de máximo do potencial $U(\chi)$. Ela, então, retorna à singularidade.

De acordo com Kobayashi & Maeda (2008), em estrelas dotadas de um campo gravitacional newtoniano superficial, $\Phi = GM/\mathcal{R}$, muito intenso, o valor de $\chi_{\text{crítico}}$ necessário para a obtenção de uma solução assintótica do tipo de Sitter é maior que o parâmetro χ_s . Portanto, todos os valores, inferiores a χ_s , escolhidos para a condição de contorno central produzem uma solução em que a partícula clássica atravessa o ponto de máximo do potencial $U(\chi)$. Nesse caso há uma singularidade no escalar $K = R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ para os modelos (6.17).

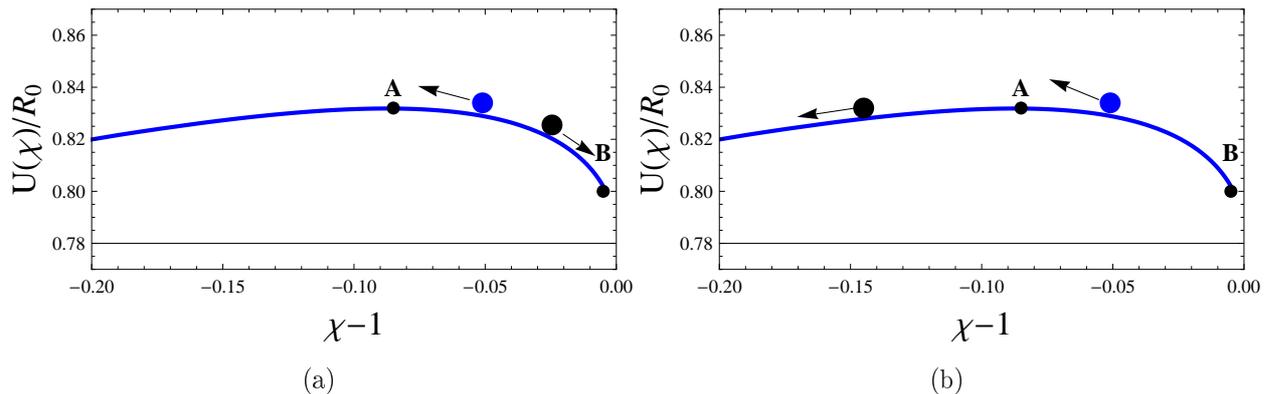


Figura 7.3: De acordo com Kobayashi & Maeda (2008), em estrelas relativísticas é impossível obter soluções em que o campo χ , que representa a posição da partícula clássica no contexto da analogia mecânica, satisfaça a condição de contorno $\chi(r \rightarrow \infty) \rightarrow \chi_\infty$. Nesse caso, ou a partícula clássica passa pelo máximo do potencial $U(\chi)$ com velocidade não nula, conforme visto na figura 7.3a, ou a partícula não é capaz de vencer a barreira de potencial, conforme visto na figura 7.3b.

Existe um ponto controverso, explorado em Upadhye & Hu (2009), na argumentação exibida anteriormente. Por continuidade, a obtenção tanto de condições de contorno em que o ponto material ultrapassa o máximo do potencial $U(\chi)$ quanto de um outro intervalo em que essa partícula não atravessa esse ponto, implica a existência de um valor crítico cuja solução prevê a partícula localizada nesse ponto de máximo no limite $r \rightarrow \infty$ (Upadhye & Hu 2009).

Corroborando esse fato, é importante ressaltar que, em contradição à alegação apresentada em (Kobayashi & Maeda 2008), a satisfação da desigualdade $\chi_c > \chi_s$ não é suficiente para demonstrar a existência de uma solução singular. Dado que a pressão $p(r)$ é uma função decrescente na coordenada radial, o módulo da força \mathcal{F} aumenta conforme a coordenada r se afasta da origem. Logo, a força resultante pode mudar de sinal no interior estelar, não só impedindo o alcance da singularidade, como também impulsionando a partícula rumo ao máximo do potencial $U(\chi)$.

Para evitar a existência de divergências nos casos em que $\chi_c > \chi_s$, é essencial manter a partícula próxima da imobilidade, até que a pressão decaia de forma suficiente para permitir o domínio da força \mathcal{F} , levando esse ponto material em direção ao máximo do potencial, $U(\chi)$. Segundo Upadhye & Hu (2009), é possível obter esse comportamento desde que a condição de contorno satisfaça a desigualdade $\chi_c - \chi_s \leq 1 \times \mathcal{O}(10^{-50})$. Nesse caso, a dinâmica do campo é, inicialmente, dominada pelo termo de atrito presente na equação de campo (7.11),

pois o módulo da força resultante é ínfimo no centro da estrela.

7.2 Solução Analítica

O requisito descrito no último parágrafo da seção anterior equivale à exigência para que o efeito camaleão possa produzir uma solução do tipo *thin shell*. De fato, a existência de estrelas relativísticas está intimamente associada à presença do efeito camaleão (Upadhye & Hu 2009). Para evidenciar essa relação, uma solução analítica, demonstrada em Kobayashi & Maeda (2008), para as equações de campo (7.1), (7.2) e (7.4) é exibida neste capítulo. Nesse desenvolvimento, a obtenção de um limite máximo para o potencial newtoniano, fato que fundamenta a conclusão relativa à não existência de estrelas relativísticas, depende, de forma inevitável, da afirmação referente à produção de soluções do tipo *Thick-Shell* por esses objetos.

A argumentação analítica que se segue tem como regime de validade o limite $r \ll 1$. Contudo, as hipóteses

$$|B(r) - 1| \ll 1, \quad |N(r) - 1| \ll 1, \quad (7.14)$$

$$\left| \frac{1}{B(r)} \frac{dB(r)}{dr} \right| \ll r^{-1}, \quad \left| \frac{1}{N(r)} \frac{dN(r)}{dr} \right| \ll r^{-1} \quad (7.15)$$

são extrapoladas em seguida para todo o interior estelar. Além disto, o potencial $U(\chi)$ e a força \mathcal{F} são aproximados, em toda a estrela, pelo valor dessas respectivas funções em $\chi = \chi_c$. Por último, a pressão é inicialmente ignorada no cálculo do módulo da força \mathcal{F} . Nessas condições, o traço das equações de campo é igual a

$$\frac{d\chi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\chi}{dr} = \frac{\kappa^2}{3} (-\rho_c) + \frac{2\chi_c^3}{3} \frac{dV}{d\chi} \Big|_{\chi=\chi_c}. \quad (7.16)$$

A constante de proporcionalidade, existente na relação entre o escalar de Ricci e o traço do tensor energia-momento, foi substituída por intermédio da fórmula $\kappa^2 = 8\pi G$, válida no sistema de unidades em que $c = 1$. A expressão

$$\frac{d\chi}{dr} = -\frac{2G\mu}{3\mathcal{R}^3} r \quad \Rightarrow \quad \chi = \chi_c - \frac{G\mu}{3\mathcal{R}^3} r^2, \quad (7.17)$$

exibe a solução da equação (7.16) (Kobayashi & Maeda 2008). O parâmetro μ é definido por

meio da igualdade

$$\mu := \frac{4\pi}{3} \left(\rho_0 - \frac{\chi_c^3}{4\pi G} \frac{dV}{d\chi} \Big|_{\chi=\chi_c} \right) \mathcal{R}^3. \quad (7.18)$$

A equação

$$\frac{dB(r)}{dr} = \frac{r}{\chi(r)} \left(-\frac{2\chi_c^3}{3} \frac{dV}{d\chi} \Big|_{\chi=\chi_c} + \frac{16\pi G\rho}{3} \right) \quad (7.19)$$

corresponde à aproximação da equação de campo (7.1), no limite de validade das hipóteses (7.14) e (7.15). Além disso, a constante $\chi_c^2 V(\chi_c)$ foi desprezada nessa igualdade. A partir da substituição do campo χ pelo seu valor expresso em (7.17), da posterior integração da equação (7.19) e da utilização da aproximação $\ln(1+x) \approx x$, a igualdade

$$B(r) = 1 - \frac{2Gr^2}{\chi_c} \frac{(M - \mu/3)}{\mathcal{R}^3}, \quad (7.20)$$

é obtida. Nessa fórmula, o parâmetro M equivale à massa da estrela sendo, portanto, igual a $M = 4\pi\rho_c\mathcal{R}^3/3$ (Kobayashi & Maeda 2008).

Na região externa à estrela, as hipóteses (7.14) e (7.15), referentes ao comportamento dos potenciais $B(r)$, $dB(r)/dr$ e $dN(r)/dr$, continuam válidas. Todavia, a forma funcional do potencial $N(r)$ é ajustada pela função constante $N(r) = N_\infty \neq 1$. Nesse caso, potencial $U(\chi)$ é aproximado pela expressão

$$\frac{2\chi^3}{3} \frac{dV}{d\chi} \approx (\chi - \chi_{\max}) \frac{2\chi_{\max}}{3} \frac{d^2V}{d\chi^2} \Big|_{\chi=\chi_{\max}} \quad (7.21)$$

no limite $\chi \sim \chi_1$. Nessa igualdade, o parâmetro λ é definido por intermédio da equação $\lambda_\chi^{-2} := (2\chi_{\max}^2/3)d^2V/d\chi^2|_{\chi=\chi_{\max}}$ (Kobayashi & Maeda 2008).

Mediante a manutenção das hipóteses (7.14) e (7.15), o traço (7.4) das equações de campo equivale à igualdade

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\chi}{dr} = \frac{\chi - \chi_{\max}}{\lambda_\chi^2}. \quad (7.22)$$

Por consequência, o campo χ é igual a

$$\chi = \chi_{\max} + \mathcal{C} \frac{e^{-(r-\mathcal{R})/\lambda_\chi}}{r}. \quad (7.23)$$

As soluções (7.17) e (7.23) precisam ser compatibilizadas na fronteira $r = \mathcal{R}$, a partir da exigência de continuidade dessas funções e das respectivas derivadas primeira, com respeito à coordenada radial. Esses vínculos implicam o sistema

$$\begin{aligned} -\frac{2G\mu}{3\mathcal{R}^2} &= -\frac{\mathcal{C}}{r\lambda_\chi} - \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{R}^2} \\ &\approx \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{R}^2} \Rightarrow \mathcal{C} = \frac{2G\mu}{3}, \end{aligned} \quad (7.24)$$

$$\chi_c = \chi_{\max} + \frac{G\mu}{\mathcal{R}} \quad (7.25)$$

de equações, que permite calcular a constante \mathcal{C} , presente em (7.23), e a condição de contorno no infinito para o campo χ . A validade da desigualdade $\lambda_\chi \approx \mathcal{O}(\Lambda_{\text{eff}}^{-1/2}) \gg \mathcal{R}$ permite o desprezo do primeiro termo presente no lado direito da equação (7.24). Nessa estimativa, o parâmetro Λ_{eff} equivale a $\Lambda_{\text{eff}} = R_{\text{ds}}/4$ por definição. A partir dessa definição, é possível demonstrar a expressão $\lambda^{-2} \sim \Lambda_{\text{eff}}$, conforme verificado na equação

$$\lambda_\chi^{-2} = \frac{2\chi^3}{3} \frac{d^2V}{d\chi^2} \Big|_{\chi=\chi_{\max}} \sim \left(\chi \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^{-1} - R(\chi) \right) \Big|_{\chi=\chi_{\max}} \sim R_0 \sim R_{\text{ds}} \sim \Lambda_{\text{eff}}. \quad (7.26)$$

Fora da estrela, os campos

$$B(r) = 1 - \frac{2G(M - \mu/3)}{\chi_c r}, \quad (7.27)$$

$$N(r) = N_\infty \left[1 - \frac{2G(M + \mu/3)}{\chi_c r} \right] \quad (7.28)$$

são avaliados por intermédio da resolução das equações de campo (7.1) e (7.2). Novamente, é necessário compatibilizar os resultados obtidos no interior e no exterior estelar. A partir dessas expressões, é possível calcular diretamente o valor do parâmetro pós newtoniano

(PPN) γ , definido por meio da razão $\gamma := (B(r) - 1)/(N(r) - 1)$. Ele é igual a

$$\gamma = \frac{3M - \mu}{3M + \mu}. \quad (7.29)$$

Neste capítulo, o potencial newtoniano $\Phi(r)$ é definido com o objetivo de permitir que as diferentes componentes da métrica possam ser reescritas numa forma funcional análoga à obtida pela teoria da Relatividade Geral. Assim, por intermédio da expressão

$$\Phi(r) := \frac{G}{\chi_c} \frac{(M(r) + \mu/3)}{r}, \quad (7.30)$$

os campos $N(r)$ e $B(r)$ passam a ser, respectivamente, iguais a $N(r) = 1 - 2\Phi(r)$ e a $B(r) = (1 - 2\Phi(r))^{-1}$. Nos cálculos que se seguem, apenas o potencial newtoniano superficial é utilizado. Por simplicidade de notação, esse número também é nomeado Φ . Por consequência, é possível reescrever a equação (7.17) na forma

$$\Delta := \frac{\chi_c - \chi_{\max}}{\chi_c} = \frac{\Phi}{4\pi} \left(\frac{3\mu}{3M + \mu} \right). \quad (7.31)$$

Conforme discutido no capítulo 3.3, a relação $\Delta \ll \Phi$ é um requisito necessário para a existência de soluções do tipo *thin shell*. A partir de uma análise da igualdade (7.31), é possível concluir que essa desigualdade é satisfeita se, e somente, se $\mu \ll M$. Em contrapartida, essa expressão é válida desde que a equação $4\pi G\rho_c \approx \chi^3 dV(\chi)/d\chi|_{\chi=\chi_c}$ seja acatada. Nas situações em que $\mu \simeq M$, a solução obtida é do tipo *thick shell* e, conseqüentemente, o parâmetro PPN γ é igual a $\gamma = -1/2$.

O argumento central, que embasa a conclusão a respeito da inexistência de estrelas relativísticas em teorias $f(R)$, consiste, de acordo com Kobayashi & Maeda (2008), na impossibilidade desses objetos produzirem soluções do tipo *thin shell*. Essa afirmação torna possível a obtenção do limite superior

$$\Phi < \Phi_{\max} = \frac{4}{3} (1 - \chi_{\max}) \sim 3 \times 10^{-1} \quad (7.32)$$

para o valor do potencial newtoniano superficial permitido pelo modelo (6.3), a partir da equação (7.31) e do vínculo $\chi_c < 1$. Logo, estrelas dotadas de potenciais superiores a

esse valor não existem. No entanto, objetos compactos, dotados de potenciais newtonianos superficiais superiores a esse limite, são observados na natureza.

7.3 Soluções Numéricas

Esta seção apresenta diferentes soluções numéricas para exemplificar a não existência de estrelas relativísticas, contidas em Kobayashi & Maeda (2008). O método numérico utilizado é intitulado *Shooting Method*, pois ele consiste em testar, de forma aleatória, valores para a condição de contorno central do campo χ , com o objetivo de encontrar o valor, $\chi_{\text{crítico}}$, da condição de contorno no infinito dentro do erro numérico pressuposto.

Nas simulações apresentadas em Kobayashi & Maeda (2008), a densidade de energia no interior de uma estrela satisfaz a igualdade $4\pi G\rho_c = (1 \times 10^6)\Lambda_{\text{eff}}$, com $\Lambda_{\text{eff}} = R_1/4$. Esse é um valor irrealista, pois uma densidade de energia da ordem de grandeza de 1 g/cm^3 , típica de uma estrela não relativística, é cerca de 1×10^{30} vezes superior ao valor da densidade de energia associada à constante cosmológica. Para produzir um potencial newtoniano superficial adequado, essas estrelas simuladas têm raios imensos, da ordem de megaparsec, comparados com tamanhos fisicamente plausíveis.

Apesar do valor selecionado para a densidade de energia das estrelas simuladas parecer absurdo, ele permite a integração numérica das equações de campo e, além disso, não interfere na física inerente à análise, dependente apenas do valor do potencial newtoniano. Os parâmetros n e α , presentes no modelo (6.3), são iguais a $n = 1$ e a $\alpha = 2.088$ nessas simulações. Nesse caso particular, o valor χ_{max} , que maximiza o potencial $U(\chi)$, é igual a $\chi = 9.228 \times 10^{-1}$. Vale ressaltar a não compatibilidade dessa escolha de parâmetros com os testes clássicos da gravitação, pois o efeito camaleão inexistente, mesmo em estrelas não relativísticas, conforme será demonstrado (Upadhye & Hu 2009).

Na figura 7.4, o perfil de pressão no interior estelar, como função da coordenada radial, é exibido. Os valores centrais da pressão e do escalar de Ricci são, respectivamente, iguais a $p_c = 5 \times 10^{-3}\rho_c$ e a $R_c = 3.462 \times 10^{-6} \times 8\pi G\rho_c$. Conforme mencionado, o raio \mathcal{R} é definido como o valor da coordenada radial que anula a pressão $p(r)$.

Na imagem 7.5, os perfis numéricos dos campos $N(r)$ e $B(r)$ são expostos. Na região aproximadamente contida no intervalo $1 \leq r/\mathcal{R} \leq 1 \times 10^2$, ambos os campos listados decaem com o crescimento da coordenada radial ($N(r) \sim 1/r$ e $B(r) \sim 1/r$). Em contrapartida, na zona $r/\mathcal{R} \geq 1 \times 10^2$, as componentes da métrica podem ser bem aproximadas pela forma funcional existente num espaço-tempo de de Sitter ($N(r) \sim r^2$ e $B(r) \sim r^2$). Por último,

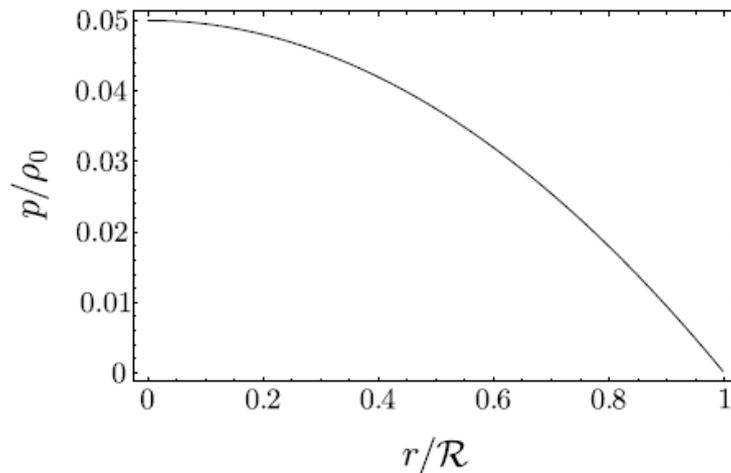


Figura 7.4: Na figura acima, o perfil, previsto pelo modelo (6.3), da pressão, $p(r)$, como função da razão r/\mathcal{R} é exposto, considerando $n = 1$ e $\alpha = 2.088$. A densidade de energia e a pressão centrais são, respectivamente, iguais a $\rho_c = (1 \times 10^6)(4\pi G)^{-1}\Lambda_{\text{eff}}$ e a $p_c = 5 \times 10^{-2}\rho_c$, com $\rho_c = \rho_0$. Já o valor do escalar de Ricci, no centro da estrela, parâmetro definidor do valor central do campo escalar χ , é igual a $R_c = (3.462 \times 10^{-6})(8\pi G\rho_c)$. Fonte: Kobayashi & Maeda (2008)

o gráfico (7.6) apresenta o perfil assintótico do campo χ , que tende, no infinito, a um valor constante, em concordância com as condições de contorno estipuladas.

Nos exemplos numéricos apresentados nas figuras 7.4, 7.5 e 7.6, o potencial newtoniano é igual a $\Phi = 6.687 \times 10^{-2}$ segundo Kobayashi & Maeda (2008). Esse é um valor muito inferior ao limite superior, denominado Φ_{max} , do potencial newtoniano superficial. Nesses casos, o comportamento dos campos $N(r)$ e $B(r)$ pode ser numericamente ajustado por meio de quatro parâmetros, intitulados c_1 , c_2 , c_3 e c_4 , conforme visto a seguir:

$$N(r) = N_{\infty} \left(1 - 2c_1 \frac{\mathcal{R}}{r} - \frac{c_2}{3} \Lambda_{\text{eff}} r^2 \right), \quad (7.33)$$

$$B(r) = 1 - 2c_3 \frac{\mathcal{R}}{r} - \frac{c_4}{3} \Lambda_{\text{eff}} r^2. \quad (7.34)$$

O melhor acordo, para o caso descrito no gráfico (7.6), ocorre quando esses parâmetros são

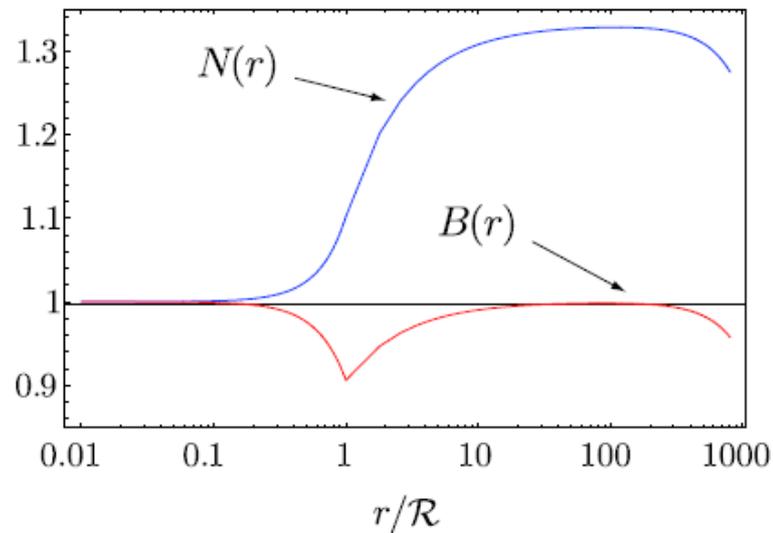


Figura 7.5: No gráfico acima, os campos $B(r)$ e $N(r)$, numericamente previstos pelo modelo (6.3), são exibidos, presumindo $n = 1$ e $\alpha = 2.088$. A densidade de energia e a pressão centrais são, respectivamente, iguais a $\rho_c = (1 \times 10^6)(4\pi G)^{-1}\Lambda_{\text{eff}}$ e a $p_c = 5 \times 10^{-2}\rho_c$. Adicionalmente, o escalar de Ricci no centro da estrela, parâmetro definidor do valor central do campo escalar χ , é igual a $R_c = (3.462 \times 10^{-6})(8\pi G\rho_c)$. Fonte: Kobayashi & Maeda (2008).

iguais a (Kobayashi & Maeda 2008)

$$\begin{aligned}
 N_\infty &= 1.332, & c_1 &= 8.716 \times 10^{-2}, \\
 c_2 &= 9.9973 \times 10^{-1}, & c_3 &= 4.747 \times 10^{-2}, \\
 c_4 &= 9.9993 \times 10^{-1}.
 \end{aligned} \tag{7.35}$$

A razão c_3/c_1 , equivalente ao parâmetro PPN γ , é igual a $c_3/c_1 \approx 5 \times 10^{-1}$, o que demonstra a não atuação do efeito Camaleão. A razão $c_4/c_2 \approx 1$ prova, por sua vez, a existência de um perfil assintótico análogo à solução de de Sitter.

As simulações afirmam, claramente, que a existência de estrelas não relativísticas é prevista pelo modelo (6.3). No entanto, no casos em que os parâmetros ρ_c , p_c e R_c são iguais a $\rho_c = (1 \times 10^6)(4\pi G)^{-1}\Lambda_{\text{eff}}$, a $p_c = 1 \times 10^{-1}\rho_c$ e a $R_c = (7 \times 10^{-1})(8\pi G\rho_c)$, a única solução não singular, no interior estelar, não se comporta, assintoticamente, como uma métrica do tipo de Sitter (Kobayashi & Maeda 2008). Nessa situação, a partícula clássica, no contexto da analogia mecânica, atravessa o máximo do potencial $-V(\chi)$ com energia cinética não nula.

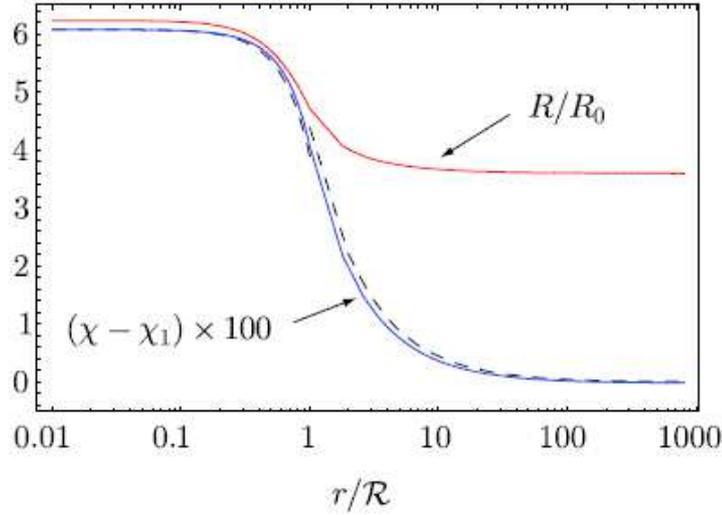


Figura 7.6: Na imagem acima, o campo χ e o escalar de Ricci, previstos numericamente pelo modelo (6.3), são apresentados, supondo $n = 1$ e $\alpha = 2.088$. A densidade de energia e a pressão centrais são, respectivamente, iguais a $\rho_c = (1 \times 10^6)(4\pi G)^{-1}\Lambda_{\text{eff}}$ e a $p_c = 5 \times 10^{-2}\rho_c$. Além disso, o escalar de Ricci no centro da estrela, parâmetro definidor do valor central do campo escalar χ , é igual a $R_c = (3.462 \times 10^{-6})(8\pi G\rho_c)$. Fonte: Kobayashi & Maeda (2008).

Além disso, o escalar $K = R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ diverge no limite $r \rightarrow \infty$ (Kobayashi & Maeda 2008). O valor do potencial newtoniano, para essa escolha particular de parâmetros, é igual a $\Phi \approx 1.203 \times 10^{-1}$.

A obtenção de valores para o potencial newtoniano maiores que $\Phi = 1.203 \times 10^{-1}$, por meio de um ajuste das condições de contorno, origina, segundo Kobayashi & Maeda (2008), soluções rapidamente divergentes. Nesse caso, ou a partícula pontual não consegue alcançar o topo do potencial $U(\chi)$, retornando, em seguida, em direção à singularidade, ou então a partícula já inicia seu movimento rumo à divergência do escalar de Ricci.

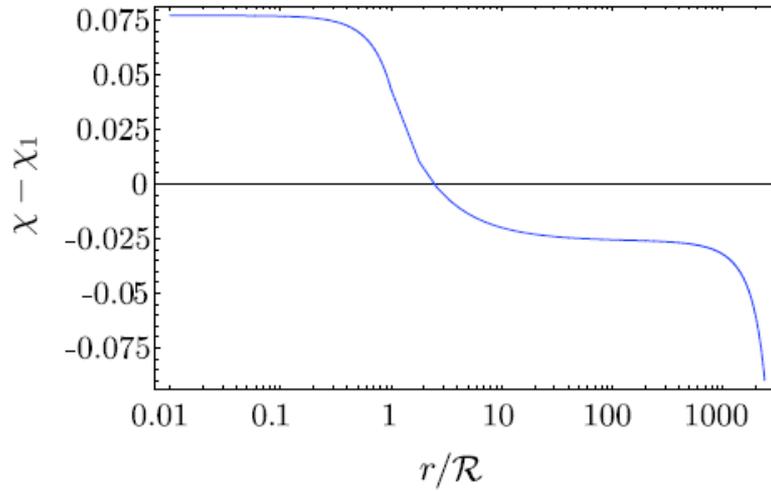


Figura 7.7: Na figura acima, a diferença $\chi - \chi_1$, com $\chi_1 = \chi_\infty$, prevista numericamente pelo modelo (6.3), é apresentada, considerando $n = 1$ e $\alpha = 2.088$. A densidade de energia e a pressão centrais são, respectivamente, iguais a $\rho_c = (1 \times 10^6)(4\pi G)^{-1}\Lambda_{\text{eff}}$ e a $p_c = (1 \times 10^{-1})\rho_c$. Adicionalmente, o valor do escalar de Ricci no centro da estrela, parâmetro definidor do valor central do campo escalar, é igual a $R_c = (7 \times 10^{-1})(8\pi G\rho_c)$. Fonte: Kobayashi & Maeda (2008).

7.4 Soluções

As escolhas de parâmetros apresentadas na seção anterior visam a satisfação do requisito indispensável para a obtenção de uma solução do tipo *thin shell*. O fracasso desse empreendimento motivou Kobayashi & Maeda (2008) a postularem a inexistência desse tipo de dinâmica em estrelas relativísticas, hipótese básica nos argumentos analíticos apresentados neste capítulo. Entretanto, o valor da expressão $4\pi G(\rho_c - 3p_c) - \chi^3 dV(\chi)/d\chi|_{\chi=\chi_c}$, necessário para encontrar soluções compatíveis com o efeito camaleão, é da ordem de grandeza de 1×10^{-50} (Upadhye & Hu 2009). Aparentemente, as simulações exibidas Kobayashi & Maeda (2008) não continham uma precisão dessa magnitude.

Antes de analisar, com maior profundidade, os argumentos expostos em Upadhye & Hu (2009), este capítulo irá discutir outras considerações propostas anteriormente à publicação desse trabalho. A primeira delas, apresentada em Dev et al. (2008), consiste na introdução de parâmetros, na lagrangiana, dominantes no limite $R \rightarrow \infty$. A mais elementar e bem motivada correção ultravioleta é, conforme discutido no capítulo 6, proporcional ao quadrado do escalar de Ricci.

A presença do termo R^2/μ desloca a singularidade do ponto que maximiza o potencial $U(\chi)$. Nesse caso, o limite $R \rightarrow \infty$ corresponde a $\chi \rightarrow \infty$. Portanto, o potencial, mais suave, afasta o parâmetro χ_s para valores elevados do campo χ . Corroborando essa afirmação, Kobayashi & Maeda (2009) demonstram que, em princípio, a presença de uma correção ultravioleta resolve o problema apontado em Kobayashi & Maeda (2008), conforme visto no gráfico (7.8).

No entanto, é necessário pressupor um parâmetro μ enorme, comparado a R_0 , para obstruir a influência dessas correções ultravioletas nas previsões para formação de estruturas, durante a fase dominada pela matéria não relativística, e na física da Radiação Cósmica de Fundo. Para satisfazer os modelos inflacionários, desenvolvidos em Starobinsky (1980), é indispensável selecionar valores da ordem de grandeza do escalar de Ricci na época em que a inflação ocorreu.

A exigência de uma constante de acoplamento, que obedeça a desigualdade $\epsilon := R_0/\mu \ll 1$, é problemática segundo Kobayashi & Maeda (2009). Para esses autores, a existência de objetos compactos é compatível com um intervalo de valores para o parâmetro ϵ limitado

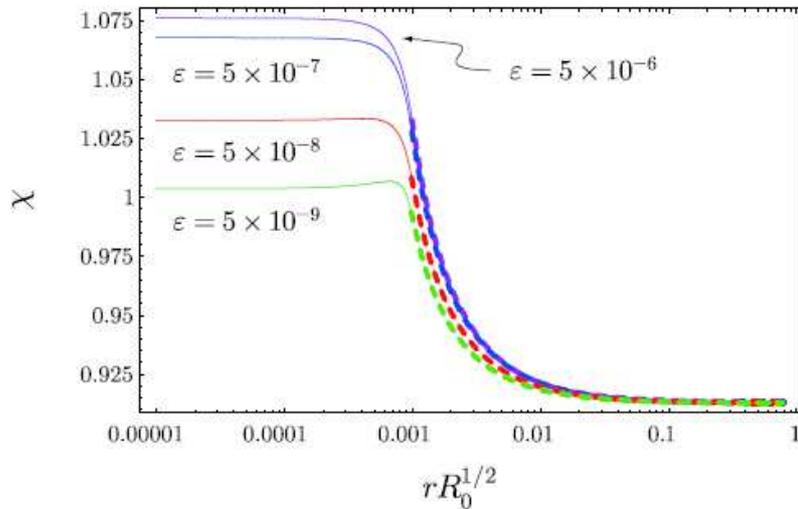


Figura 7.8: Na figura acima, o perfil do campo escalar χ , previsto o modelo (6.3) acrescido da correção R^2/μ , é apresentado, conjecturando distintos valores do parâmetro $\epsilon := R_0/\mu$. Os valores pressupostos para os termos n e α são iguais a $n = 1$ e $\alpha = 2.088$. Adicionalmente, a densidade de energia e a pressão centrais são, respectivamente, iguais a $\rho_c = (1 \times 10^6)(4\pi G)^{-1}\Lambda_{\text{eff}}$ e a $p_c = (3 \times 10^{-1})\rho_c$. Fonte: Kobayashi & Maeda (2009).

inferiormente. Abaixo desse limite, estrelas relativísticas passam a não mais existir na teoria. Esse limiar é, contudo, incompatível com os vínculos necessários para que tornar a correção ultravioleta relevante apenas no processo inflacionário (Kobayashi & Maeda 2008). De acordo com a figura 7.10, não é possível encontrar um solução não singular, estática e esfericamente simétrica para $\epsilon \sim 1 \times 10^{-10}$.

No entanto, uma propriedade poderia, em princípio, viabilizar uma correção ultravioleta restrita à época inflacionária. O gráfico 7.11 demonstra uma relação existente entre o menor valor do parâmetro ϵ compatível com a existência de estrelas relativísticas e a densidade de energia estelar utilizada nas simulações. Apesar da impossibilidade de reproduzir, numericamente, estrelas realísticas, a figura 7.11 permite ajustar essa dependência. O resultado desse procedimento é expresso na equação

$$\epsilon_{\min} \sim 1 \times 10^{-2} \left(\frac{R_0}{8\pi G \rho_0} \right), \quad (7.36)$$

em que $\rho_0 = \rho_c$. A extrapolação dessa expressão para densidades de energia de objetos compactos, da ordem de grandeza de $1 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$, possibilita estimar o valor limítrofe do parâmetro ϵ . Como consequência, é possível afirmar que o parâmetro μ deve assumir

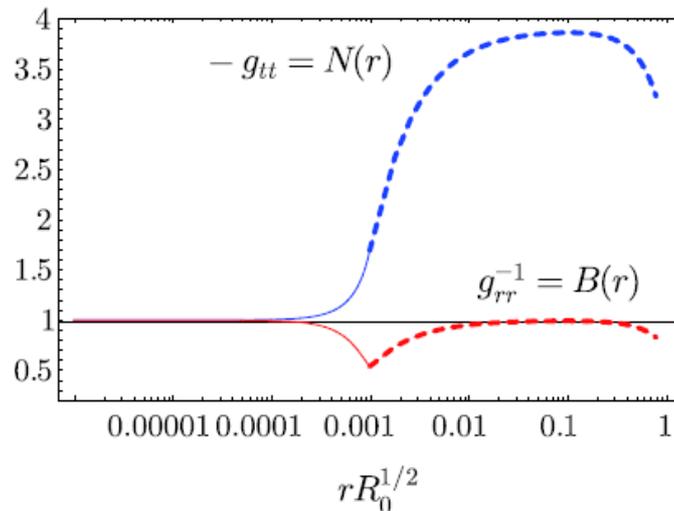


Figura 7.9: Na figura acima, é apresentado o comportamento dos campos $N(r)$ e $B(r)$ previsto pelo modelo (6.3) acrescido do termo R^2/μ . Os parâmetros utilizados são: $n = 1$, $\alpha = 2.088$ e $\epsilon := R_0/\mu = 5 \times 10^{-9}$. A densidade de energia e a pressão centrais são, respectivamente, iguais a $\rho_c = (1 \times 10^6)(4\pi G)^{-1}\Lambda_{\text{eff}}$ e a $p_c = (3 \times 10^{-1})\rho_c$. As linhas contínuas e pontilhadas representam, respectivamente, as soluções na região interna e externa à estrela. Fonte: Kobayashi & Maeda (2009).

valores inferiores a 1×10^{-19} GeV. Contudo, esse é um número incompatível com as escalas de energia características da inflação.

Uma outra proposta, passível de resolver o problema referente à inexistência de estrelas relativísticas, foi conjecturada em Miranda et al. (2009b). Ela consiste na elaboração de modelos sem correções ultravioletas, mas dotados de um potencial $V(\chi)$ que satisfaça o limite $\lim_{\chi \rightarrow \infty} V(\chi) \rightarrow \infty$. O modelo (6.18) é um exemplo cujo potencial respeita esse limite. A presença de uma barreira infinita afasta a singularidade, localizada em $\chi = 1$, do ponto correspondente à solução do tipo de Sitter. Por ser mais suave, o potencial possibilita a obtenção numérica de estrelas relativísticas, conforme exibido na figura (7.12).

Além das possibilidades mencionadas, Babichev & Langlois (2009a) e Babichev & Langlois (2009b) argumentam que a modelagem de estrelas relativísticas por meio de uma densidade de energia constante implica a violação do requisito $\rho - 3p > 0$. Apesar da validade desse argumento, o limite superior imposto, nesses trabalhos, ao valor do potencial newtoniano é mais elevado, em comparação aos vínculos obtidos, numericamente, em Kobayashi & Maeda (2008) e em Kobayashi & Maeda (2009).

Por último, Upadhye & Hu (2009) refuta a inexistência de estrelas relativísticas em

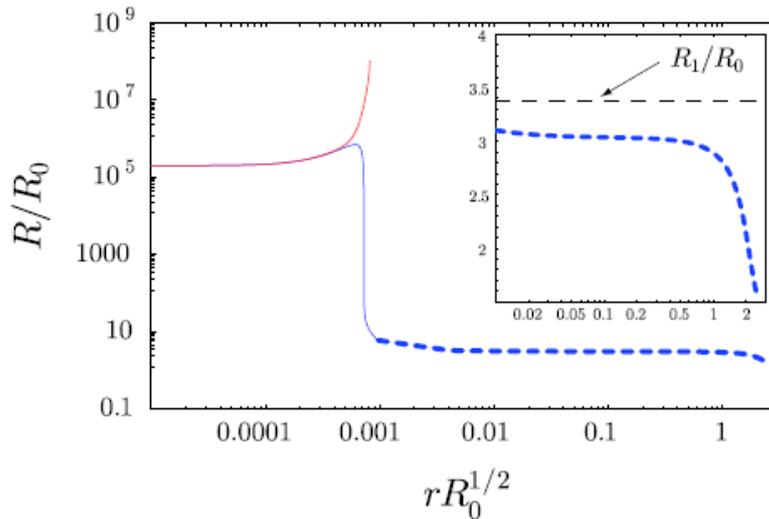


Figura 7.10: Na figura acima, o perfil do escalar de Ricci, previsto pelo modelo (6.3) acrescido do termo R^2/μ , é apresentado. Os parâmetros utilizados são: $n = 1$, $\alpha = 2.088$ e $\epsilon := R_0/\mu = 5 \times 10^{-10}$. A densidade de energia e a pressão centrais são, respectivamente, iguais a $\rho_c = (1 \times 10^6)(4\pi G)^{-1}\Lambda_{\text{eff}}$ e a $p_c = 3 \times 10^{-1}\rho_c$. A linha vermelha representa a solução divergente, obtida pressupondo $R_c = (1.85 \times 10^{-1})(8\pi G\rho)$. Em contrapartida, as linhas azuis, tanto cheia quanto pontilhada, indicam uma solução divergente no limite $r \rightarrow \infty$. Nela, o valor central do escalar de Ricci é igual a $R_c = (1.84 \times 10^{-1})(8\pi G\rho_c)$. Fonte: Kobayashi & Maeda (2009).

teorias $f(R)$ dotadas de um potencial singular, como no caso dos modelos (6.2), (6.3) e (6.4). Presumindo um perfil de pressão, $p(r)$, decrescente na coordenada radial, o módulo da força $\mathcal{F} \propto \rho(r) - 3p(r)$ aumenta e módulo conforme o valor do parâmetro r se afasta da origem. Assim sendo, é possível encontrar soluções bem comportadas, caso a diferença $\chi_c - \chi_s$, satisfaça a relação $\chi_c - \chi_s \sim \mathcal{O}(10^{-50})$. À primeira vista, essa equação pode induzir a conclusão de que esse enorme ajuste fino torna essa solução não singular instável sob pequenas perturbações.

A figura 7.13 apresenta uma solução não singular, obtida por Upadhye & Hu (2009), prevista pelo modelo (6.3). Mesmo presumindo a equação de estado $p_c = 1 \times 10^{-1}\rho_c$, o campo χ se mantém a uma distância finita da singularidade, apesar da incrível proximidade desse ponto singular com o valor do campo no interior da estrela.

A obtenção desse perfil não singular pode ser compreendida por intermédio do mecanismo de camaleão. Para as condições de contorno estipuladas, a força efetiva imposta à partícula clássica, no contexto da analogia mecânica, tem um módulo aproximadamente nulo. Nesse caso, a dinâmica do campo é dominada pelo termo de atrito, presente na equação (7.11),

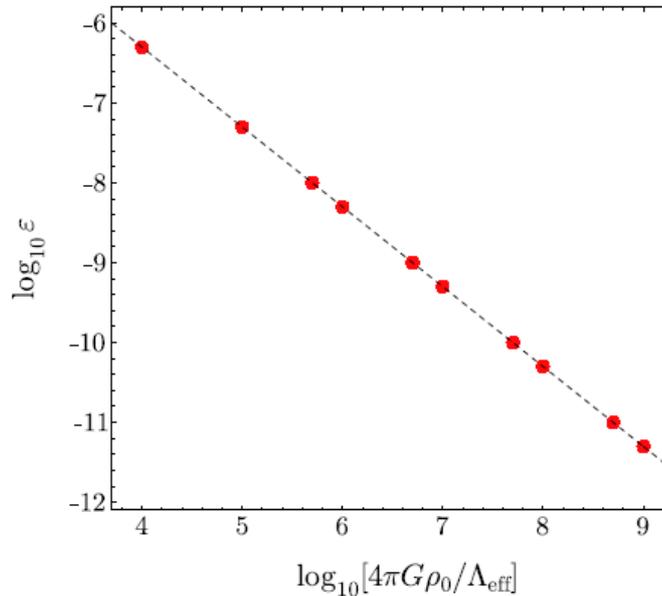


Figura 7.11: Na figura acima, o valor mínimo do parâmetro ϵ é exibido como função da densidade de energia, ρ_c , utilizada na integração numérica das equações de campo, considerando equações de estado relativísticas e o modelo (6.3), acrescido da correção R^2/μ . De acordo com Kobayashi & Maeda (2009), há objetos compactos apenas para valores, desse fator, superiores a um limite mínimo. Fonte: Kobayashi & Maeda (2009).

impedindo-o de alcançar a singularidade. À medida que a pressão diminui, a força \mathcal{F} aumenta. Após um determinado valor crítico da coordenada radial, definidor do início da região denominada *Thin Shell*, a partícula passa a ser impulsionada para longe do ponto $\chi = 1$. Essa mudança de sentido da força resultante é verificada no gráfico 7.14.

Um outro ponto relevante está relacionado com o comportamento do potencial newtoniano. Conforme mencionado, ele permite que os campos $B(r)$ e $N(r)$ possam ser reescritos na mesma forma funcional dos elementos de uma métrica de Schwarzschild. Além disso, também é imposto, por intermédio de uma redefinição do parâmetro de massa, a igualdade $\Phi(r) = GM_{\text{eff}}/r$, expressão que é análoga à prevista pela mecânica newtoniana. Nesse caso, a massa efetiva é igual a (Upadhye & Hu 2009)

$$\begin{aligned}
 M_{\text{eff}} &:= - \int_0^{\mathcal{R}} \frac{3r^2}{2G} \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \phi} dr \\
 &= \int_0^{\mathcal{R}} \left[4\pi r^2 (\rho(r) - 3p(r)) + \frac{3r^2}{2G} \frac{dU}{d\phi} \right] dr
 \end{aligned} \tag{7.37}$$

por definição. No limite em que a derivada do potencial é muito menor que o termo propor-

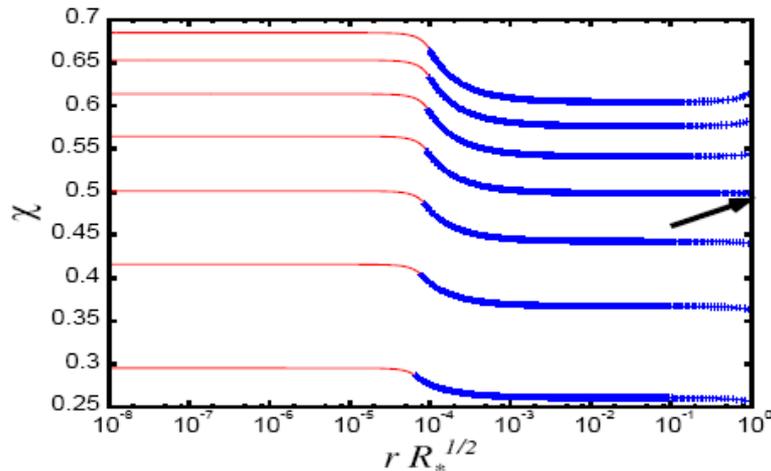


Figura 7.12: Na figura acima, o perfil do campo χ , previsto pelo modelo (6.18), é apresentado, supondo $\alpha = 1.2$ e R_c variando de $1 \times 10^{-8} R_0$ até $4 \times 10^{-8} R_0$. A seta aponta para uma solução que é, assintoticamente, de Sitter, satisfazendo, assim, a condição de contorno $\lim_{r \rightarrow \infty} \chi \rightarrow \chi_\infty = \text{constante}$. Fonte: Miranda et al. (2009b)

cional a $(\rho(r) - 3p(r))$, a massa efetiva tende a

$$M_{\text{linear}} = \int_0^{\mathcal{R}} 4\pi r^2 (\rho(r) - 3p(r)) dr . \quad (7.38)$$

Essa definição coincide com a expressão prevista pela Relatividade Geral para massa estelar, sob as mesmas imposições descritas nos parágrafos anteriores.

De acordo com a figura 7.15, a razão entre a massa efetiva e a massa linear é igual a $M_{\text{eff}}/M_{\text{linear}} = 1$, para pequenos valores do potencial newtoniano. Todavia, no domínio $\Phi \approx 1 \times 10^{-2}$, a razão $M_{\text{eff}}/M_{\text{linear}}$ passa a decrescer como função desse potencial, podendo alcançar valores significativamente menores que 1. Logo, quanto mais relativística é a estrela, menor é a parcela desse objeto que contribui para o aumento do potencial newtoniano, em comparação com a previsão da Relatividade Geral. Esse potencial, portanto, atinge um valor máximo no ponto em que $\rho(r) - 3p(r) = 0$. No intervalo negativo de valores do traço do tensor energia-momento, ele diminui até se estabilizar numa constante (Upadhye & Hu 2009).

Mediante a utilização de equações de estado mais realistas, que mantêm positivo o traço do tensor energia-momento, é possível manter o crescimento do potencial newtoniano contínuo sem, no entanto, invalidar a conclusão de que a massa efetiva é cada vez menor, quando comparada à prevista pela teoria da Relatividade Geral. Certamente, a utilização desse tipo

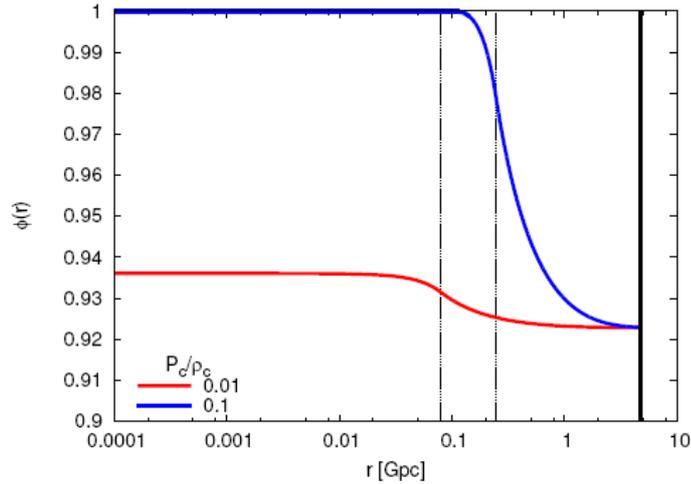


Figura 7.13: Na figura acima, o valor do campo $\phi(r) := \chi(r)$, previsto pelo modelo (6.3), é apresentado, considerando $n = 1$, $\alpha = 2.08849$, $\rho_c = 1 \times 10^2 \rho_{\Lambda_{\text{eff}}}$ e duas equações de estado distintas. Na curva em vermelho, a igualdade $p_c = 1 \times 10^{-2} \rho_c$ é postulada, enquanto na curva em azul é utilizada a equação de estado central $p_c = 1 \times 10^{-1} \rho_c$. Para a condição de contorno proposta por Upadhye & Hu (2009), estrelas relativísticas existem e o campo χ não diverge, mesmo considerando a extrema proximidade desse campo escalar com a singularidade, localizada em $\chi = 1$, ao longo de todo interior estelar. O mecanismo, passível de impedir a presença de divergências, é o efeito de camaleão. Fonte: Upadhye & Hu (2009).

de equação de estado evitaria o uso de uma condição de contorno χ_c inferior ao valor onde se localiza o máximo do potencial $U(\chi)$.

Por fim, é necessário entender porque Upadhye & Hu (2009) foram capazes de encontrar soluções não singulares apenas quando consideraram uma precisão numérica muito alta. Esse fato foi determinante para que Kobayashi & Maeda (2008), de maneira equivocada, concluíssem que objetos compactos não existem em modelos $f(R)$ considerados viáveis.

Em primeiro lugar, o valor do campo χ , no interior de um objeto compacto com densidade de ordem de grandeza de $1 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$, é, de modo aproximado, igual a $1 - \mathcal{O}(10^{-217})$ (Upadhye & Hu 2009). Para demonstrar essa estimativa, é necessário pressupor a relação $R \sim \kappa^2 \rho$, válida face à presença do efeito camaleão, e calcular o valor, nesse ponto, da derivada f_R .

Em segundo lugar, o comprimento compton no interior da estrela, calculado por meio da

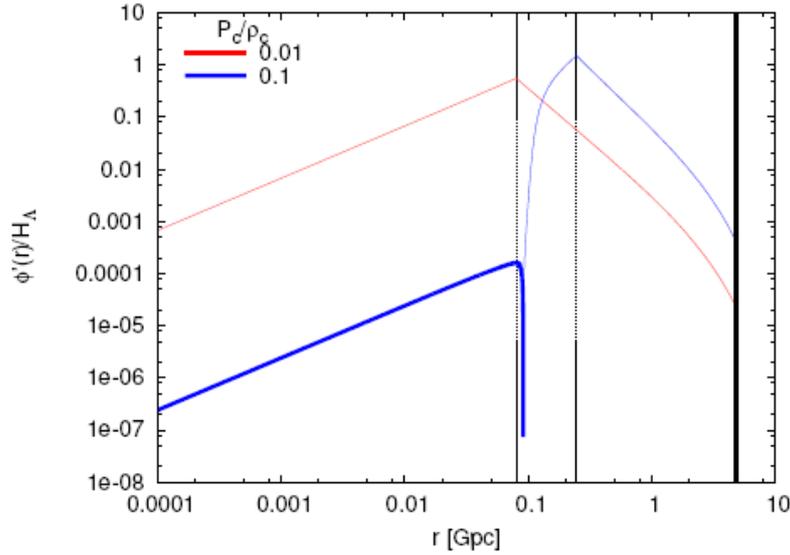


Figura 7.14: Na figura acima, o valor da derivada do campo $\phi(r) := \chi(r)$ como função do raio r previsto pelo modelo (6.3), pressupondo $n = 1$, $\alpha = 2.088$, $\rho_c = 1 \times 10^2 \rho_{\Lambda_{\text{eff}}}$ e duas equações de estado distintas, é apresentado. Na curva em vermelho, a igualdade $p_c = 1 \times 10^{-2} \rho_c$ é postulada, enquanto na curva em azul é utilizada a equação $p_c = 1 \times 10^{-1} \rho_c$. Além disto, curvas contínuas e espessas significam valores positivos da derivadas e curvas contínuas e finas indicam valores negativos da derivada do campo $\chi(r)$. Apesar do força $\mathcal{F} \propto \rho(r) - 3p(r)$ ser inicialmente inferior à derivada do potencial, o que implica valores positivos para a derivada do campo escalar, a diminuição da pressão inverte essa relação e o campo passa a se afastar da singularidade. Fonte: Upadhye & Hu (2009) .

definição (3.47), é, no modelo (6.3), descrito pela expressão (Upadhye & Hu 2009)

$$\lambda_{f_R} \approx \sqrt{\frac{6\alpha n(n+1)}{R_0} \left(\frac{1-\chi}{2n\alpha}\right)^{\frac{2n+2}{2n+1}}} . \quad (7.39)$$

Esse comprimento é da ordem de grandeza de $(1-\chi)^{4/6}/\sqrt{R_0} \sim 1 \times 10^{-60}$ cm, supondo $n \approx 1$ e $\alpha \approx 1$. Logo, para simular o efeito camaleão, a discretização na coordenada radial não deve permitir saltos superiores a esse valor.

Finalmente, a diferença, existente no centro da estrela, $\chi_c - \chi_s$, cresce de modo proporcional a $e^{r/\lambda_{f_R}}/r$. Por meio da substituição do valor obtido para o comprimento compton, uma instabilidade excepcionalmente intensa é demonstrada, o que inviabiliza qualquer tratamento numérico.

Mesmo considerando os pequenos valores utilizados, nas simulações descritas em Kobayashi & Maeda (2008), Kobayashi & Maeda (2009) e Upadhye & Hu (2009), para a densidade

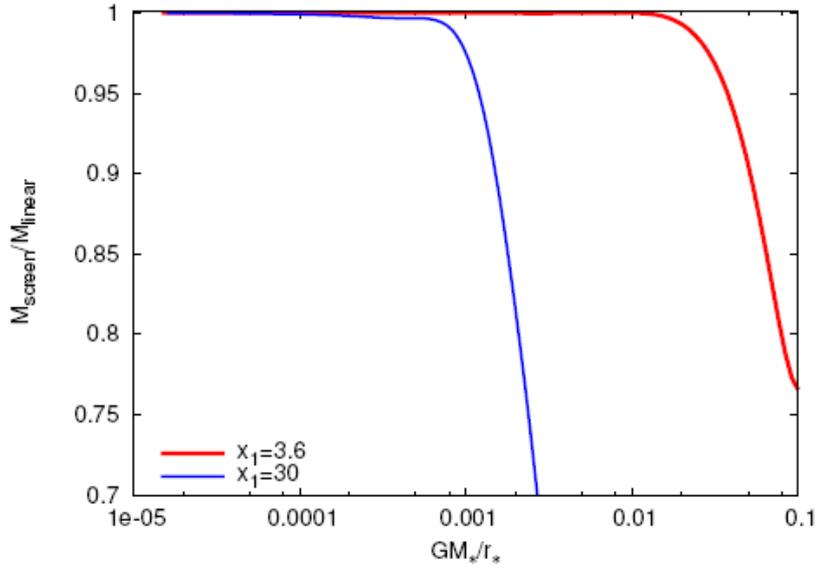


Figura 7.15: Na figura acima, A razão entre $M_{\text{screen}} := M_{\text{eff}}$ e M_{linear} é apresentada, presumindo o modelo (6.3), para diferentes valores de parâmetros. A curva vermelha corresponde à $n = 1$ e à $\alpha = 2.088$ e a curva azul, por sua vez, considera $n = 1$ e $\alpha = 1.5033 \times 10^1$. Por último o fator x_1 é definida como a razão entre o valor do escalar de Ricci que maximiza o potencial $U(\chi)$ e o parâmetro R_0 . Fonte: Upadhye & Hu (2009) .

de energia estelar, o comprimento compton é pequeno o suficiente para exigir um ajuste considerável da condição de contorno. Para que o campo não varie, no intervalo $[0, \mathcal{R}/2]$, de forma significativa, é indispensável obedecer o vínculo $\chi_c - \chi_s \sim 1 \times 10^{-65}$ (Upadhye & Hu 2009).

Para demonstrar que, no interior da estrela, desvios do campo, com relação a χ_s , aumentam de maneira exponencial na coordenada radial, é necessário analisar a equação (7.11) nas vizinhanças do ponto χ_s , conforme mostrado a seguir:

$$\left. \frac{d^2 \chi}{dr^2} \right|_{\chi_s + \delta \chi} + \left. \frac{1}{r} \frac{d\chi}{dr} \right|_{\chi_s + \delta \chi} = - \left. \frac{dU}{d\chi} \right|_{\chi_s + \delta \chi} + \mathcal{F}. \quad (7.40)$$

O potencial $U(\chi)$ é, em primeira ordem na expansão em série de Taylor, igual a

$$\begin{aligned} \left. \frac{dU(\chi)}{d\chi} \right|_{\chi_s + \delta \chi} &= \left. \frac{dU(\chi)}{d\chi} \right|_{\chi_s} + \left. \frac{d^2 U(\chi)}{d\chi^2} \right|_{\chi_s} \delta \chi + \mathcal{O}(\delta \chi)^2 \\ &= \left. \frac{dU(\chi)}{d\chi} \right|_{\chi_s} - m^2 \delta \chi + \mathcal{O}(\delta \chi)^2, \end{aligned} \quad (7.41)$$

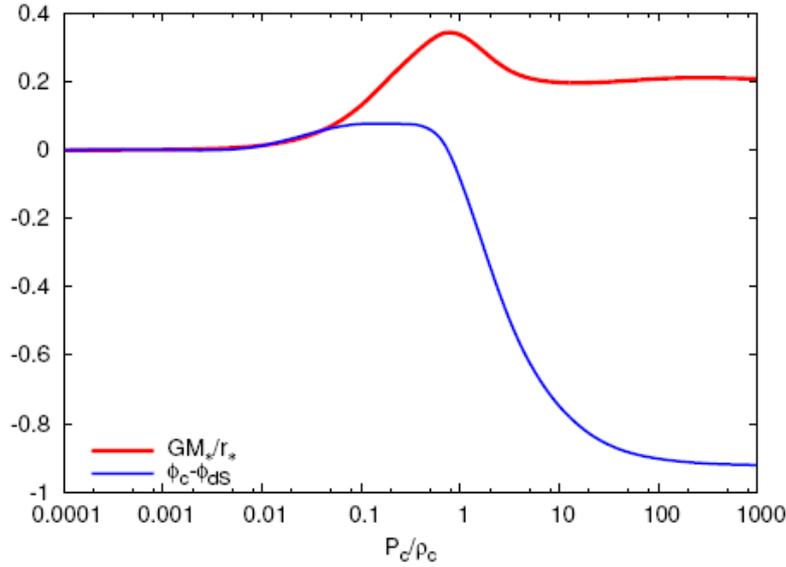


Figura 7.16: Na figura acima, o potencial newtoniano (curva vermelha contínua) e a diferença entre o valor central e assintótico do campo $\phi = \chi$ são apresentados como função da razão p_c/ρ_c . Note que mesmo nos casos em que o traço do tensor energia momento assume, no centro da estrela, valores negativos, é possível obter soluções não singulares, resultado esse em contradição com as previsões contidas em Babichev & Langlois (2009a) e em Babichev & Langlois (2009b). Fonte: Upadhye & Hu (2009) .

em que

$$m_U^2 = \left| \frac{d^2 U(\chi)}{d\chi^2} \right|. \quad (7.42)$$

Mediante a substituição da expansão (7.41) na equação de campo (3.73), a igualdade

$$\left. \frac{d^2 \chi}{dr^2} \right|_{\delta\chi} + \left. \frac{1}{r} \frac{d\chi}{dr} \right|_{\delta\chi} = m_U^2 \delta\chi \quad (7.43)$$

é obtida. A solução,

$$\delta\chi(r) = \delta\chi(0) \left\{ C_1 \frac{e^{+m_U r}}{r} + C_2 \frac{e^{-m_U r}}{r} \right\}, \quad (7.44)$$

dessa equação é proporcional a uma função exponencial crescente, somada a uma função exponencial decrescente na coordenada radial (Upadhye & Hu 2009, Thongkool, Sami & Choudhury 2009).

Conforme mencionado, a expressão (7.44) demonstra a necessidade de um ajuste fino

no valor do campo escalar χ , para possibilitar a integração das equações de campo, no caso de estrelas relativísticas. Esse fato é, particularmente, problemático no método de integração utilizado em Kobayashi & Maeda (2008), porque o *Shooting Method* consiste em tentar adivinhar, de maneira aleatória, o valor da condição de contorno indispensável para a obtenção de uma solução não singular.

A adição da correção R^2/μ permite à obtenção de soluções em Kobayashi & Maeda (2009), apesar da baixa precisão numérica, pois a presença desse termo diminui o valor da massa m_U^2 (Thongkool, Sami & Choudhury 2009). Nesse caso, o ajuste nas condições de contorno é menos crítico. Entretanto, conforme o parâmetro $\epsilon = R_0/\mu$ diminui, a massa volta a crescer e a partir de um determinado ponto, Kobayashi & Maeda (2008) não conseguem reaver soluções não singulares.

Por último, Thongkool, Sami & Choudhury (2009) argumentam que a necessidade de ajuste fino na condição de contorno, para permitir a obtenção de uma solução numérica das equações de campo (7.1), (7.2) e (7.4) sem a presença de singularidades, implica a instabilidade de estrelas relativísticas em teorias $f(R)$. Contudo, uma análise da estabilidade de uma determinada solução deve ser feita a partir do estudo das condições iniciais e não das condições de contorno. Por intermédio desse procedimento, Seifert & Wald (2007) e Seifert (2007) demonstram que, em modelos $f(R)$ cuja derivada segunda f_{RR} é uma função estritamente positiva, as soluções esfericamente simétricas e estáticas são estáveis.

Em resumo, este capítulo analisou o problema referente à existência de estrelas relativística em teorias $f(R)$. Essa questão foi crucial no desenvolvimento desses modelos, pois as conclusões enunciadas em Kobayashi & Maeda (2009) inviabilizavam a utilização de correções ultravioletas para produzir modelos inflacionários. Também é possível afirmar que as diferentes propostas apresentadas em Miranda et al. (2009b), Babichev & Langlois (2009a), Babichev & Langlois (2009b) foram importantes para elucidar diferentes aspectos dessa questão. Entretanto, o trabalho apresentado em Upadhye & Hu (2009) foi decisivo para demonstrar a existência de objetos compactos, sem a necessidade de adicionar parâmetros ultravioletas.

Capítulo 8

Efeito Camaleão aplicado a diferentes modelos

O objetivo deste capítulo consiste em utilizar a solução, exibida no capítulo 3, predita pelo efeito camaleão no Sistema Solar, para vincular a forma funcional de alguns modelos analisados nesta dissertação. Em particular, o comportamento previsto pelos exemplos estudados nas discussões referentes à existência de estrelas relativísticas e de singularidades na evolução cosmológica são apresentados. As equações (3.68) e (3.78) demonstram uma redução da constante de acoplamento da correção da força gravitacional com relação à interação newtoniana por um fator proporcional à diferença $\phi_c - \phi_\infty$ presente nas soluções do tipo *thin shell*. Nesse contexto, os termos ϕ_c e ϕ_∞ correspondem ao mínimo do potencial efetivo (3.58) na região interna e externa à estrela. Neste capítulo, o preenchimento uniforme da região externa com matéria escura é postulado. Também é pressuposto um perfil constante $\rho(r) = \rho_c$ da densidade de energia estelar.

Portanto, para restringir diferentes modelos, é necessário calcular os valores ϕ_c e ϕ_∞ e, em seguida, comparar esses resultados com os vínculos observacionais. Segundo Capozziello & Tsujikawa (2008), Faulkner et al. (2007) e Khoury & Weltman (2004a), os testes clássicos impõe a desigualdade

$$\frac{\Delta\mathcal{R}}{\mathcal{R}} < 1.15 \times 10^{-5}. \quad (8.1)$$

Na expressão acima, a notação adotada nas grandezas definidas na moldura de Einstein

não foi utilizada, pois, a expressão $\chi \approx 1$ é satisfeita no limite de altos valores do escalar de Ricci e, como consequência, os valores das variáveis definidas na moldura de Einstein são análogos aos obtidos na moldura de Jordan. De acordo com Capozziello & Tsujikawa (2008), o modelo (6.3) prevê os resultados

$$\phi_c \approx -\sqrt{6}n\alpha \left(\frac{R_0}{\kappa^2 \rho_c} \right)^{2n+1} \quad \text{e} \quad \phi_\infty \approx -\sqrt{6}n\alpha \left(\frac{R_0}{\kappa^2 \rho_\infty} \right)^{2n+1}. \quad (8.2)$$

no limite $R \gg R_0$. O pressuposto de uma densidade de energia estelar 24 ordens de grandeza superior à densidade de matéria escura implica, assim, a razão

$$\frac{\Delta \mathcal{R}}{\mathcal{R}} \approx n\alpha \left(\frac{R_0}{\kappa^2 \rho_\infty} \right)^{2n+1} \frac{G}{\kappa^2 \Phi} \quad (8.3)$$

entre espessura da camada *Thin Shell* e o raio \mathcal{R} da estrela.

Para demonstrar os resultados expressos em (8.2), é útil reescrever a derivada $dV_{\text{eff}}/d\phi$ na forma

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{d\phi} = \left[\frac{R(1 - h_R) + 2h(R)}{(1 + h_R)^2} \right] - \frac{\kappa^2}{\sqrt{6}} e^{\frac{\phi}{\sqrt{6}}} \rho. \quad (8.4)$$

Para modelos $f(R)$ infravermelhos, as aproximações $h_R \ll 1$ e $h(R) \ll R$ são válidas no limite $R \gg R_0$. No sistema Solar, a densidade média de matéria escura é 6 ordens de grandeza superior à densidade crítica do universo e, assim, esse limite é satisfeito. Nessas condições, o mínimo do potencial efetivo ocorre em $R \approx \kappa^2 \rho$ e, como consequência, o valor ϕ_{min} que o minimiza é, de modo aproximado, igual a

$$\phi_{\text{min}} \approx \sqrt{\frac{3}{2}} \ln(1 + h_R) \Big|_{R=\kappa^2 \rho} \approx \frac{\sqrt{6}}{2} h_R \Big|_{R=\kappa^2 \rho}. \quad (8.5)$$

Essa fórmula origina o resultado exposto na igualdade (8.2).

As equações (8.3) e (8.1) vinculam as constantes α , n e R_0 . A partir das condições necessárias para a existência, na cosmologia, de uma fase acelerada estável, é possível utilizar restringir o parâmetro n . Inicialmente, o valor do escalar de Ricci correspondente, no modelo

(6.3), à solução do vácuo, obedece a equação

$$\alpha = \frac{x_{\text{dS}}^{n+1}}{2(x_{\text{dS}}^n - n/2 - 1)}. \quad (8.6)$$

O parâmetro x_{dS} , expresso na igualdade acima, é definido por meio da igualdade $x_{\text{dS}} = R_{\text{dS}}/R_0$. A substituição dessa expressão na desigualdade obtida por intermédio dos resultados (8.3) e (8.1), permite demonstrar a expressão

$$\frac{n/2}{2(x_{\text{dS}}^n - n/2 - 1)} \left(\frac{R_{\text{dS}}}{\kappa^2 \rho_\infty} \right)^{n+1} < 2.4 \times 10^{-11}. \quad (8.7)$$

O valor do potencial superficial Φ , que é igual a 2.12×10^{-6} , foi utilizado na demonstração da desigualdade acima.

Conforme mostrado nesta dissertação, para que uma fase acelerada, na cosmologia, seja estável, é necessário satisfazer a desigualdade $m := Rf_{RR}/f_R < 1$, em $R = R_{\text{dS}}$. Essa condição implica a expressão $x_{\text{dS}}^n > 2(n/2)^2 + 3(n/2) + 1$. Para $n > 0$, o termo que multiplica o fator $(R_{\text{dS}}/\rho_\infty)^{n+1}$ é menor que 2.5×10^{-1} . Por último, a relação $R_{\text{dS}} \sim \kappa^2 \rho_0$, em que ρ_0 é a densidade de todas as componentes presentes no universo, calculada em $z=0$ sendo, portanto, aproximadamente igual a $1 \times 10^{-29} \text{ g/cm}^3$, implica o vínculo

$$n > 1.0 \quad (8.8)$$

para o parâmetro n . Uma análise similar, considerando o planeta Terra, a sua atmosfera e o espaço preenchido por matéria escura ao invés do Sol, obtém a restrição $n > 1.8$, mediante a confrontação dos resultados com os testes da violação do princípio de equivalência (Capozziello & Tsujikawa 2008).

De maneira similar, a concordância com os testes clássicos exige o respeito à desigualdade $n > 1.0$ no modelo (6.2). É importante ressaltar que a diferença entre os vínculos obtidos para os modelos (6.2) e (6.3) é consequência da maneira pela qual esses parâmetros são definidos, pois ambos os casos possuem um comportamento análogo no regime $R \gg R_0$.

Os resultados deste capítulo permitem concluir que é indispensável respeitar a desigual-

dade

$$h_R \leq \left(\frac{R_0}{R} \right)^{2.7} \quad (8.9)$$

no limite $R \gg R_0$. Essa equação impõe severas restrições aos modelos infravermelhos dotados de uma barreira infinita (Thongkool, Sami, Gannouji & Jhingan 2009). Além disso, essa igualdade demonstra a viabilidade do modelo (6.4), pois o valor do campo ϕ que minimiza o potencial é igual $-\alpha e^{-\kappa^2 \rho / R_0}$. Logo, para $\alpha \sim 1$ e $\kappa^2 \rho_m / R_0 \sim 1 \times 10^6$, ele é igual a $3 \times 10^{-4.35 \times 10^5} \ll 10^{-12}$.

A demonstração de que modelos infravermelhos dotados de uma barreira infinita não são compatíveis com as observações no Sistema Solar não é geral, estando focada na análise dos casos particulares (6.17) e (6.18). Entretanto, esses modelos possuem características que são compartilhadas por outros exemplos, permitindo generalizar os resultados obtidos. Em particular, exemplos que obedecem a equação (8.9) tendem à lagrangiana do modelo Λ CDM no limite de alto valores do escalar de Ricci. Nesse contexto, os vínculos necessários, para resolver o problema, enunciado no capítulo 6, sem a adição de termos ultravioletas e para compatibilizar modelos $f(R)$ com os testes clássicos da gravitação, são mutuamente exclusivos.

De acordo com os resultados obtidos neste capítulo, o mínimo do potencial na moldura de Jordan é dado pelo valor exibido na equação (8.5). Portanto, a substituição da derivada h_R por $-\alpha/(1 + R/R_0)$ demonstra a expressão

$$\phi_{\min} \approx -\frac{\sqrt{6}}{2} \alpha n \frac{R_0}{\kappa^2 \rho}, \quad (8.10)$$

válida para o modelo (6.18) (Thongkool, Sami, Gannouji & Jhingan 2009).

Conforme mencionado, esse decaimento é muito mais lento que o exigido pela equação (8.9). Nesse caso, o parâmetro α e a constante R_0 são relacionados pela equação (Thongkool, Sami, Gannouji & Jhingan 2009)

$$\alpha = \frac{x_{\text{ds}}(1 + x_{\text{ds}})}{-x_{\text{ds}} + 2(1 + x_{\text{ds}}) \ln(1 + x_{\text{ds}})} \quad (8.11)$$

na solução de vácuo. Assim, o valor do parâmetro R_0 é de forma aproximada, igual a

$R_0 \sim \kappa^2 \rho_0$, para $\alpha \sim 1$. Essa relação, juntamente com a relação $R_{\text{ds}}/R_0 \sim \mathcal{O}(1)$, demonstra que valores para α muito dissonantes de 1, produz uma solução cosmológica inviável, pois originaria um universo do tipo de Sitter com um escalar de Ricci excessivamente elevado.

Dado que a densidade média de matéria escura é seis ordens de grandeza superior à densidade crítica, a estimativa

$$\frac{\Delta \mathcal{R}}{\mathcal{R}} \approx \frac{\alpha n G}{2 \kappa^2 \Phi} \frac{R_0}{\rho} \approx \mathcal{O}(1) \quad (8.12)$$

é válida. Esse valor é muito superior ao exigido pelos vínculos expostos em (8.1). É interessante notar que a relação existente entre o valor do parâmetro β , presente no modelo (6.17), e a altura do potencial permite obter vínculos para o tamanho máximo permitido para essa barreira.

Para vincular a altura do potencial efetivo a partir dos testes observacionais é preciso eliminar todas as possibilidades envolvendo uma barreira infinita previstas pela generalização (6.17). Para parâmetros β , n e α gerais, o potencial efetivo é, na moldura de Einstein, igual a (Thongkool, Sami, Gannouji & Jhingan 2009)

$$V_E(\phi(R)) = -\frac{\alpha R_0}{2} \frac{(1+x^n)^{-1-1/\beta} \{nx^n - (1+x^n) [-1 + (1+x^n)^{1/\beta}] \beta\}}{[-1 + n\alpha x^{n-1} (1+x^n)^{-1-1/\beta}]^2}, \quad (8.13)$$

com $x = R/R_0$. Esse potencial também é minimizado em $R \approx \kappa^2 \rho$ no limite $R \gg R_0$ e, portanto, a fórmula (8.5) pode ser novamente utilizada. Logo, para determinar o valor do campo ϕ que minimiza esse potencial, é indispensável calcular o valor da constante

$$\alpha = \frac{x_{\text{ds}} (1+x_{\text{ds}}^n)^{1+1/\beta}}{-nx_{\text{ds}}^n + 2(1+x_{\text{ds}}^n) [-1 + (1+x_{\text{ds}}^n)^{1/\beta}] \beta} \quad (8.14)$$

na solução de vácuo do tipo de Sitter, e do campo

$$h_R = -n\alpha x^{n-1} (1+x^n)^{-1-1/\beta}, \quad (8.15)$$

para valores arbitrários dos campos β , n e α (Thongkool, Sami, Gannouji & Jhingan 2009).

Finalmente, a partir das equações (8.1) e (8.15) é possível concluir que, para o exemplo

(6.17), o valor do campo que minimiza esse potencial é igual a (Thongkool, Sami, Gannouji & Jhingan 2009):

$$\phi_{\min} \approx -\frac{\sqrt{6}}{2}\alpha n \left(\frac{R_0}{\kappa^2 \rho} \right)^{\frac{n}{\beta}+1}. \quad (8.16)$$

De acordo com a expressão (8.9), o expoente da razão $(R_0/(\kappa^2 \rho))$ deve ser maior ou igual a 2.7 para satisfazer os vínculos locais da gravitação (Thongkool, Sami, Gannouji & Jhingan 2009). Logo, uma barreira infinita é viável se e somente se o parâmetro α for, na solução de vácuo, da ordem de $(R_0/(\kappa^2 \rho_m))^{1.7} \approx 1 \times 10^{-8}$, com ρ_m da ordem da densidade média de matéria escura no sistema Solar. No limite $\beta \rightarrow \infty$ essa constante é, por um lado, aproximadamente igual a

$$\alpha = \frac{x_{\text{ds}}^n (1 + x_{\text{ds}}^n)}{-n x_{\text{ds}}^n + 2(1 + x_{\text{ds}}^n) \ln(1 + x_{\text{ds}}^n)} \approx \frac{x_{\text{ds}}^{n+1}}{x_{\text{ds}}^n (2 \ln(x_{\text{ds}}^n) - n)} \approx \frac{x_{\text{ds}}}{n (2 \ln(x_{\text{ds}}) - 1)} \sim \mathcal{O}(1) \quad (8.17)$$

nos casos em que $n \geq 10$, pois $x_{\text{ds}} \approx 1.5 \Rightarrow x_{\text{ds}}^n \gg 1$ e, portanto, conforme o expoente n cresce, o valor da constante α decresce, tendendo a zero no limite $n \rightarrow \infty$. Por outro lado, nos casos em que $n \rightarrow 0$, a quantidade α é, de modo aproximado, igual a

$$\alpha = \frac{x_{\text{ds}}^n (1 + x_{\text{ds}}^n)}{-n x_{\text{ds}}^n + 2(1 + x_{\text{ds}}^n) \ln(1 + x_{\text{ds}}^n)} \approx \frac{x_{\text{ds}}(1 + 1)}{(1 + 1) \ln(2)} \sim \mathcal{O}(1) \quad (8.18)$$

Logo, apenas uma pequena barreira, cujo tamanho é determinado pelo vínculo $n/\beta \geq 1.7$, é compatível com os testes clássicos da gravitação. A razão principal dessa limitação consiste no fato do mínimo do potencial, na moldura de Jordan, estar associado ao tamanho dessa barreira. Quanto maior a barreira, mais afastada do ponto $\phi = \ln(1 + h_R) = 0$ é a localização do mínimo local, conforme mostrado na figura 8.1.

Neste capítulo, os testes clássicos da gravitação foram utilizados para vincular diferentes exemplos de teorias $f(R)$. Em particular, foi demonstrado que modelos infravermelhos, dotados de uma barreira infinita no potencial $V(\chi)$, são incompatíveis com os vínculos locais da gravitação.

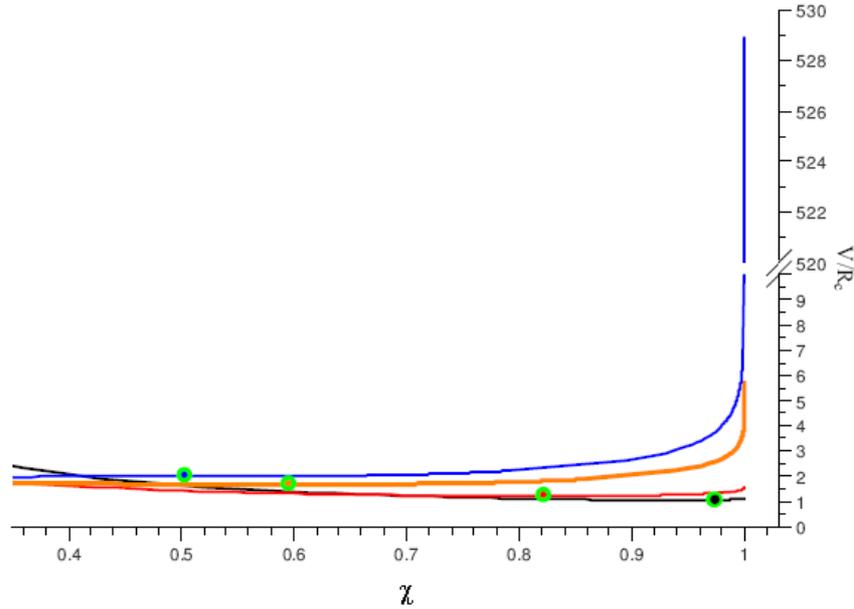


Figura 8.1: Na figura acima, o gráfico do potencial $V(\chi)$, como função do campo $\chi = f_R$, previsto pelo modelo (6.17), é apresentado, considerando $n = 4$ e diferentes valores tanto do parâmetro β , quanto do parâmetro α . Em todos os casos, o mínimo do potencial está destacado. De cima para baixo as curvas correspondem à: $\alpha \approx 1.050$ e a $\beta = 1 \times 10^3$ (curva azul); $\alpha \approx 9.53 \times 10^{-1}$ e $\beta = 10$ (curva laranja); $\alpha \approx 9.4 \times 10^{-1}$ e $\beta = 2$ (curva vermelha); $\alpha \approx 1.204$ e $\beta = 1$ (curva preta). Fonte: Thongkool, Sami, Gannouji & Jhingan (2009).

Os resultados obtidos nos quatro últimos capítulos permitem concluir que lagrangianas semelhantes à Einstein-Hilbert no regime $R \gg R_0$ são estáveis. Além disso, elas também são compatíveis com a existência de estrelas relativísticas e com os vínculos locais da gravitação. A adição de uma correção ultravioleta soluciona, por sua vez, a possível singularidade descoberta por Frolov (2008). Resolvido os problemas que inviabilizam funções muito distintas dos exemplos (6.3), (6.2) e (6.4), é interessante estudar, na cosmologia, o espectro de potência de perturbações de matéria não relativística. Nisso consiste no objetivo do próxima capítulo.

Capítulo 9

Perturbações na Cosmologia aplicadas à diferentes modelos

O objetivo deste capítulo consiste em analisar o espectro de potência de perturbações de matéria não relativística previsto por modelos $f(R)$. No capítulo 4, a equação de evolução linear para perturbações na densidade de energia dessa componente foi obtida. Conforme explicado, as soluções dessa expressão desconsidera o efeito camaleão, que é fundamental para compatibilizar esse espectro com as observações. Em particular, ele é, de forma significativa, influente nas escalas caracterizadas por vetores de onda com módulo maior ou igual a $10^{-1} h \text{ Mpc}^{-1}$, com $h \approx 7 \times 10^{-1}$.

A influência da presença de uma barreira infinita no potencial $V(\chi)$ em modelos infravermelhos, separando o valor do campo correspondente à solução de vácuo da singularidade, é estudada em seguida. Em particular, é demonstrado a expressiva alteração no espectro de potência causada por essa barreira. Em analogia com o procedimento adotado no capítulo anterior, as afirmações exibidas são obtidas por meio de uma análise do exemplo (6.18).

O espectro de potenciais linear é calculado a partir da solução da equação (4.53). Para relacioná-lo com a densidade de energia da matéria, a relação

$$\langle \delta(\vec{k}) \delta(\vec{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') P(k) \quad (9.1)$$

é utilizada. O resultado do cálculo dessa quantidade, no modelo (6.18), é explicitado na figura 9. Nela, é visualmente evidente a existência de uma discrepância entre a previsão teórica

e as observações, obtidas pelo Sloan Digital Sky Survey (de La Cruz-Dombriz, Dobado & Maroto 2009). Logo, é possível concluir que a presença de uma barreira infinita não só altera, de forma significativa, as estimativas para os observáveis vinculados nos testes clássicos da gravitação, conforme demonstrado no capítulo anterior, como também modifica o espectro de potências no regime linear. No entanto, existem incertezas que ainda permitem contabilizar esse modelo com o espectro de potências linear (Miranda, Jorás, Waga & Quartin 2009a).

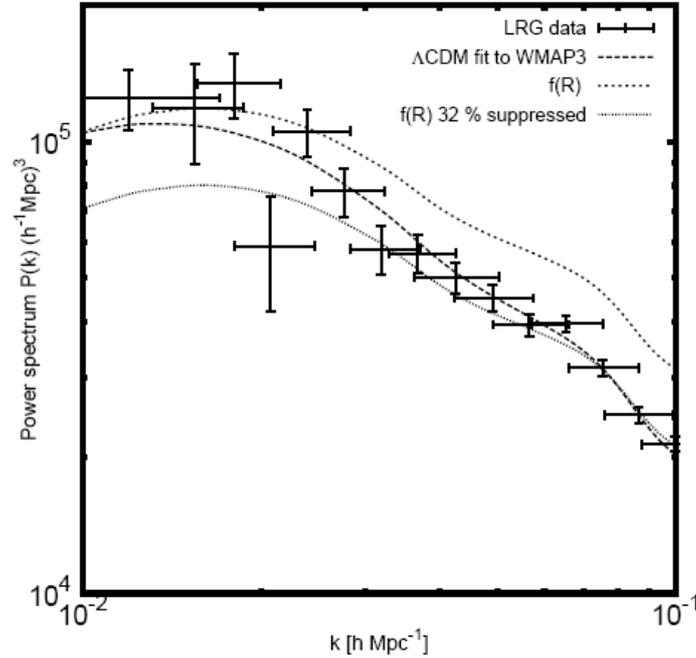


Figura 9.1: Na figura acima, o espectro de potência, previsto pelo modelo (6.18), é explicitado, considerando $\alpha = 2$. Os dados são originários do Sloan Digital Sky Survey (Tegmark et al. (2006)). A curva que melhor ajusta os dados corresponde à previsão do modelo Λ CDM. As curvas superior e inferior indicam, respectivamente, às previsões do modelo (6.18), para diferentes valores propostos para o *bias* existente entre a amplitude do espectro de potência das perturbações para a matéria escura e para os bárions. Fonte: de La Cruz-Dombriz et al. (2009).

Após demonstrar analisar modificações, com relação à lagrangiana de Einstein-Hilbert, análogas à função (6.18), o espectro de potência, previsto por modelos infravermelhos aptos a satisfazer os vínculos locais da gravitação, é investigado. Todas as conclusões que se seguem, obtidas a partir da análise do modelo (6.2), são generalizadas para exemplos semelhantes, tais como o modelo (6.3).

O espectro de potência nas escalas em que o efeito cameléon é relevante foi apresentado,

de forma pioneira, em Oyaizu et al. (2008), a partir do estudo das simulações numéricas detalhadas em Oyaizu (2008). Esses trabalhos pressupõem três hipóteses fundamentais. Em primeiro lugar, o limite $R \gg R_0$ é postulado. Como consequência, a lagrangiana (6.2) tende, nesse limite, a

$$f(R) = R - \kappa^2 \rho_\Lambda - \alpha f_{R0} \frac{R_0^{n+1}}{R^n}. \quad (9.2)$$

Nessa igualdade, a quantidade ρ_Λ é definida por intermédio da expressão $\kappa^2 \rho_\Lambda = \alpha R_0$. Além disso, essas simulações consideram $\alpha = 1$.

Em segundo lugar, as simulações numéricas presumem o limite quase estático das equações de campo na cosmologia. Portanto, as derivadas temporais de todas as grandezas físicas e geométricas são desprezadas. Essa hipótese é válida apenas em modelos passíveis de gerar uma fase transiente dominada pela matéria não relativística, como no caso do exemplo (6.2). Por último, essas simulações também postulam o limite newtoniano $k \gg H$, em que k é o módulo do vetor de onda da perturbação e H é o parâmetro de Hubble.

Considerando o elemento de linha

$$ds^2 = -(1 + 2\Psi)dt^2 + a^2(t)(1 + 2\Phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (9.3)$$

que corresponde a uma perturbação em primeira ordem da solução de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, o traço das equações de campo é reescrito na forma

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla^\mu f_R &= \nabla_\mu \nabla^\mu (f_{R0} + \epsilon \delta f_R) \\ &= \frac{2f(R) - f_R R}{3} + \frac{\kappa^2 T}{3} \\ &= \frac{2(f(R_{\text{ds}}) + \epsilon f_{R0} \delta R) - (f_{R0} + \epsilon \delta f_R)(R_{\text{ds}} + \epsilon \delta R)}{3} + \frac{\kappa^2 (\epsilon \delta T)}{3}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Os parâmetros δR , δf_R e δT , presentes nessa expressão, equivalem às perturbações dos campos R , f_R e do traço do tensor energia-momento. É importante ressaltar a dependência da variação δR do escalar de Ricci com o campo f_R . No caso particular em que o efeito camaleão é desprezível, a relação $\delta R = (f_{RR0})^{-1} \delta f_R$ é satisfeita. O parâmetro adimensional ϵ indica, por sua vez, a ordem da perturbação.

No limite quase estático, a desconsideração do termo $R_{\text{ds}}\delta f_R$ e a utilização da aproximação $f_{R0}\delta R \approx \delta R$, permite reduzir o traço das equações de campo à expressão

$$\nabla^2\delta f_R = \frac{a(t)^2(\delta R - \kappa^2\delta\rho)}{3}. \quad (9.5)$$

Nessa expressão, as componentes espaciais do tensor energia-momento também foram desprezadas, porque o limite quase estático assume, de forma implícita, a presença de uma fase dominada pela matéria não relativística. Efetuando as mudanças de notação necessárias, é elementar demonstrar que a componente 00 das equações de campo é equivalente a

$$\nabla^2\Psi = \frac{a(t)^2}{6}(4\delta\rho - \delta R), \quad (9.6)$$

a partir da expressão (4.24) para a variação do escalar de Ricci. Na obtenção dessa igualdade, os limites newtoniano, quase estático e $R/R_0 \gg 1$ foram admitidos.

As equações (9.5) e (9.6) formam um sistema fechado para o cálculo do potencial Ψ . Esse, por sua vez, determina o movimento das partículas por intermédio da equação da geodésica. As simulações, descritas em Oyaizu (2008), em Oyaizu et al. (2008) e em Schmidt et al. (2009), integram essas duas expressões, considerando um cubo de aresta L com 512 células de grid em cada direção e contendo $N_p = 256^3$ partículas. Três tamanhos diferentes para o cubo, iguais a $L = 256 h \text{ Mpc}^{-1}$, a $L = 128 h \text{ Mpc}^{-1}$ e a $L = 64 h \text{ Mpc}^{-1}$, foram pressupostos.

Para cada tamanho L , diversas simulações foram realizadas, cada uma supondo um espectro de potência inicial distinto, mas todos coerentes com o modelo inflacionário. Além disso, visto que essa simulação considera o universo dominado pela matéria não relativística por hipótese, os espectros iniciais foram calculados utilizando não só o modelo inflacionário, como também a função de transferência descrita em Eisenstein & Hu (1998). Dado um espectro de potência inicial, as partículas são lançadas na grid utilizando a aproximação de Zeldovich (Oyaizu et al. 2008).

A figura 9.2 exhibe, para diferentes valores do fator de escala, o espectro previsto pelo modelo (9.2), para o caso em que $h_{R0} := f_{R0} - 1 = 1 \times 10^{-4}$. Nele, o efeito camaleão não é relevante em baixos valores do desvio para o vermelho e, por conseguinte, a diferença existente entre os pontos vermelhos e azuis é causada pela presença desse efeito em alto

desvio para o vermelho. Além disso, a discrepância entre o espectro de potência previsto por esse modelo e por Λ CDM é significativa. A figura 9.3c confirma a inexistência desse efeito, pois se ele fosse relevante em $a(t) = 1$, então o valor do campo h_R seria, nas regiões de sobredensidade de matéria, aproximadamente igual a zero. A correlação entre os mapas descritos nessas duas figuras deveria, então, ser bastante acentuada, o que não é observado.

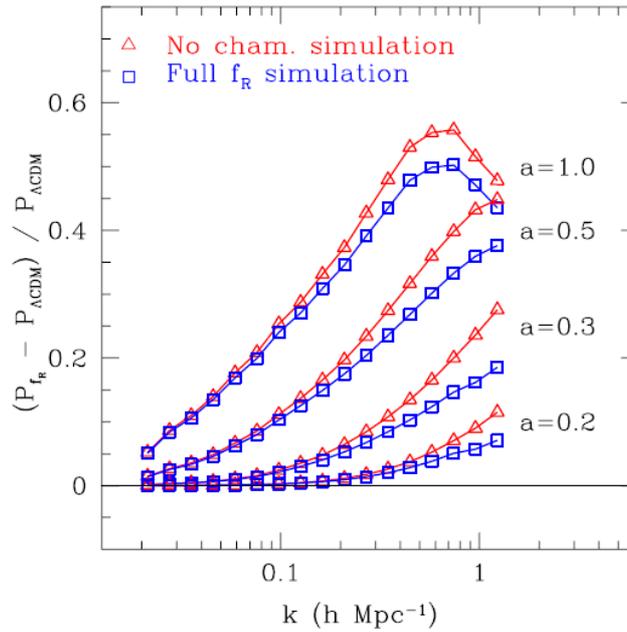


Figura 9.2: Na figura acima, o espectro de potência previsto pelo modelo (9.2) é apresentado, presumindo $h_{R0} = 1 \times 10^{-4}$. Os pontos vermelhos e triangulares correspondem à simulação em que o efeito camaleão não é considerado. Nesse caso, o espectro de potências é nomeado P_{NC} . Os pontos azuis e quadrilateros, por sua vez, apontam os resultados obtidos na simulação completa, que inclui o efeito camaleão. O espectro de potências obtido através desses pontos é denominado P_C . É possível perceber que a diferença fracional $(P_C - P_{NC})/P_C$ é, de forma significativa, maior no passado. Fonte: Oyaizu et al. (2008).

A dinâmica das perturbações para $h_{R0} = 10^{-6}$ é bastante distinta do caso anterior. Nela, a diferença entre os espectros previstos pelos dois tipos de simulações, um que considera e o outro que despreza o efeito camaleão, é significativa, quando comparado à existente na situação em que $h_{R0} = 1 \times 10^{-4}$. Além disso, o espectro de potência, obtido na presença do efeito camaleão, é semelhante ao previsto por Λ CDM. Essas características são observadas na figura 9.4.



(a)

(b)

(c)

Figura 9.3: As figuras acima exibem perfis de diferentes campos, preditos pelo modelo (9.2) no caso em que $h_{R0} = 1 \times 10^{-4}$, numa fatia 2D, recortada em $a(t) = 1$, obtidos nas simulações apresentadas em Oyaizu et al. (2008). Da esquerda para direita, eles correspondem a sobredensidade de matéria não relativística ($\delta := \delta\rho_m/\rho_m$) e ao mínimo do campo Ψ e da razão h_R/h_{R0} , ao longo da linha de visada. A variação da intensidade da sombra, indo do branco ao preto, é proporcional aos valores dessas quantidades entre os extremos dados por estas tonalidades. Na imagem 9.3a, a cor branca e preta equivalem a $\ln(1+\delta) = -5.0$ e a $\ln(1+\delta) = 9.0$. No gráfico 9.3b, esses tons correspondem a $\Psi = 0.3 \times 10^{-5}$ e a $\Psi = -4.3 \times 10^{-5}$. Finalmente, na figura 9.3c, eles valem $h_R/h_{R0} = 1.05$ e $h_R/h_{R0} = 0$. Fonte: Oyaizu et al. (2008).

A correlação existente entre as figuras 9.5a e 9.5c também ilustra, de forma clara, a relevância do efeito camaleão no caso em que $h_{R0} = 1 \times 10^{-6}$. Nas regiões de sobredensidade de matéria, o campo h_R tem um valor muito próximo de zero, conforme verificado no gráfico 9.5c. Assim, a relação $\delta R \approx \kappa^2 \rho$ é, de modo aproximado, satisfeita e, por consequência, a distribuição de valores do campo f_R segue à distribuição de matéria. Em contraste com essa situação, a figura 9.3c demonstra que o campo f_R se distribui de maneira suave ao redor do valor $f_R = f_{R0}$, quando o efeito camaleão não é atuante e, portanto, a expansão em série de Taylor $\delta f_R \approx f_{RR0} \delta R$ é acertada.

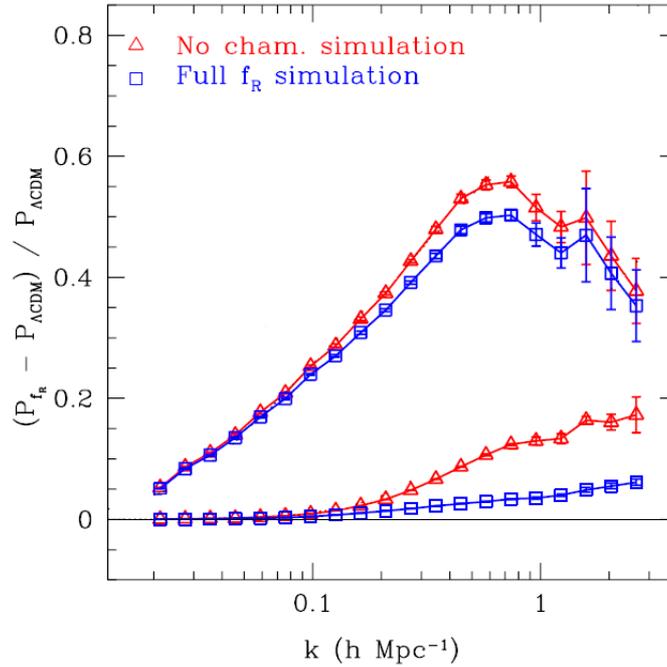


Figura 9.4: Na figura acima, o espectro de potência previsto, em $z = 0$, pelo modelo (9.2) é explicitado, nos casos em que $h_{R0} = 1 \times 10^{-4}$ (pontos superiores, em vermelho e azul) e $h_{R0} = 1 \times 10^{-6}$ (pontos inferiores, em vermelho e azuis). Os pontos vermelhos e triangulares equivalem aos resultados das simulações que suprimem o efeito camaleão. Os pontos azuis e quadrulares, por sua vez, apontam os resultados obtidos na simulação que considera esse efeito. É possível perceber que o efeito camaleão é bem mais acentuado no caso $h_{R0} = 1 \times 10^{-6}$, pois apenas nessa situação ele continua relevante em baixos valores do desvio para o vermelho. Fonte: Oyaizu et al. (2008).

As simulações numéricas, delineadas em Oyaizu (2008), em Oyaizu et al. (2008) e em Schmidt et al. (2009), podem ser utilizadas para determinar as propriedades de halos de matéria não relativística. Em particular, é possível analisar a abundância de halos como função da massa desses objetos, além do perfil de densidade de cada halo. Essas grandezas são, então, comparadas com as previsões de modelos semi analíticos, tais como o modelo de Halo (Cooray & Sheth 2002) e do tipo *scaling*, capazes de delinear a dinâmica do modelo Λ CDM com precisão (Smith, Peacock, Jenkins, White, Frenk, Pearce, Thomas, Efstathiou & Couchman 2003, Hamilton, Kumar, Lu & Matthews 1991).

A identificação de halos nas simulações é feita a partir do seguinte procedimento (Schmidt et al. 2009). Inicialmente, é necessário encontrar o ponto de máxima sobredensidade numa dada simulação. Centrado neste ponto, o número de partículas presentes numa esfera de raio r é obtido e, em seguida, a densidade ρ_m é calculada. A sobredensidade $\Delta = \rho_m / \bar{\rho}_m$, em que $\bar{\rho}_m$ equivale à densidade não perturbada de matéria não relativística, é estimada.

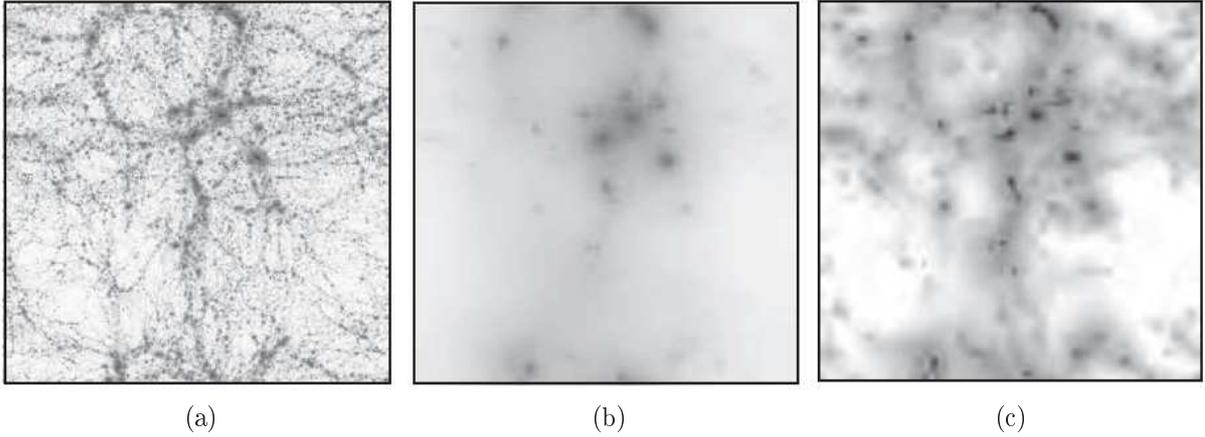


Figura 9.5: As figuras acima exibem perfis de diferentes campos, preditos pelo o modelo (9.2) no caso em que $h_{R0} = 1 \times 10^{-6}$, numa fatia 2D, recortada em $a(t) = 1$, obtidos nas simulações apresentadas em Oyaizu et al. (2008). Da esquerda para direita, esses campos correspondem a sobredensidade de matéria não relativística ($\delta := \delta\rho_m/\rho_m$) e ao mínimo, ao longo da linha de visada, do campo Ψ e da razão h_R/h_{R0} . A variação da intensidade das sombras, indo do branco ao preto, é proporcional aos valores dessas quantidades entre os extremos indicados por essas tonalidades. Na imagem 9.5a, a cor branca e preta equivalem a $\ln(1 + \delta) = -5.0$ e a $\ln(1 + \delta) = 9.0$. Já no gráfico 9.5b, esses tons correspondem à $\Psi = 3 \times 10^{-6}$ e à $\Psi = -4.3 \times 10^{-5}$. Finalmente, na figura 9.5c, eles indicam $h_R/h_{R0} = 1.05$ e $h_R/h_{R0} = 0$. Fonte: Oyaizu et al. (2008).

Se $\Delta < 3 \times 10^2$, então o raio desta esfera é ampliado e o procedimento acima é aplicado de novo, até o raio atingir um valor crítico, denominado r_{300} , em que $\Delta = 3 \times 10^2$. Por fim, essa região é considerada um halo. Para encontrar outros halos, esse método é repetido, partindo do segundo ponto de maior sobredensidade na simulação e depois do terceiro e assim por diante. Além disso, é exigido um mínimo de $N_{\min} = 800$ partículas em cada halo (Schmidt et al. 2009).

A diferença entre as contagens de halos preditas pelo modelo Λ CDM e pelo modelo (9.2), para as mesmas condições iniciais, são apresentadas na figura 9.6. No caso em que $h_{R0} = 1 \times 10^{-4}$, a discrepância existente, entre as simulações que considera e que despreza o efeito camaleão, não é muito acentuada. Isso acontece porque esse efeito é relevante apenas em alto desvio para o vermelho. Em ambos os casos, existe um aumento considerável no número de halos com massa, M_{300} , maior ou igual a $M_{300} = 1 \times 10^{14} M_{\odot}/h$, quando comparado à predição do modelo Λ CDM.

Nos casos em que $h_{R0} \leq 1 \times 10^{-5}$, o efeito camaleão tem uma atuação importante na atenuação das divergências existentes entre o modelo (9.2) e o modelo Λ CDM, especialmente

no intervalo $M_{300} \geq 1 \times 10^{14} M_{\odot}/h$. Todavia, ele também resulta num aumento do número de halos pouco massivos em vinte por cento. As áreas, na figura 9.6, preenchidas em azul equivalem às previsões para o número de halos, obtidas por intermédio da prescrição de Seth e Tormen (ST) (Sheth & Tormen 1999) aplicada a dois casos limites, que são definidos mais adiante.

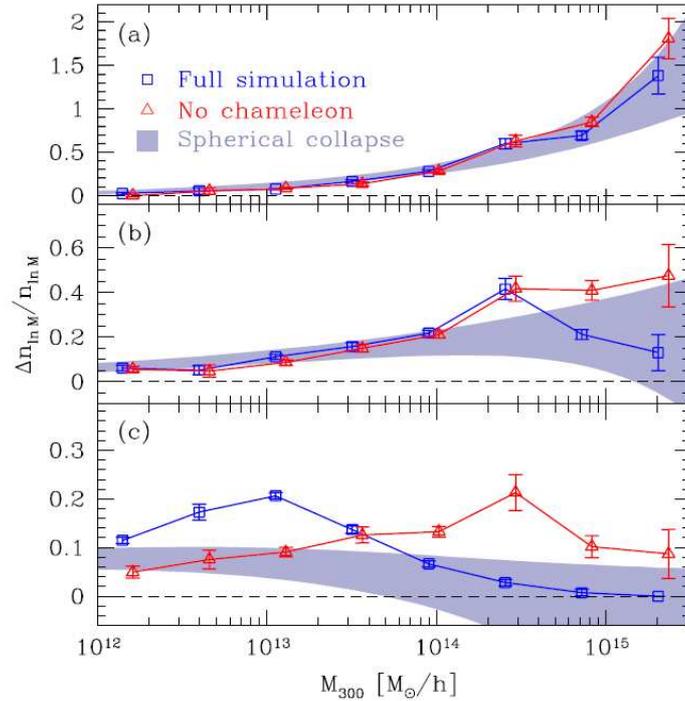


Figura 9.6: As figuras acima apresentam o número de halos, em $z=0$, previstos pelo modelo (9.2), nos casos em que $h_{R0} = 1 \times 10^{-4}$ (figura a), $h_{R0} = 1 \times 10^{-5}$ (figura b) e $h_{R0} = 1 \times 10^{-6}$ (figura c). Os quadrados azuis indicam os resultados obtidos nas simulações que consideram o efeito camaleão. Já os triângulos vermelhos correspondem às previsões das simulações em que esse efeito foi suprimido. O pequeno descolamento horizontal existente entre esses dois tipos de pontos é artificial, com o objetivo de facilitar a visualização. A região sombreada, em azul, equivale à previsão da prescrição de Sheth e Tormen aplicada a duas situações limites do modelo de colapso esférico. No primeiro caso, a gravitação newtoniana ($G_{\text{eff}} = G$) é pressuposta. No segundo caso, por sua vez, é uma nova constante da gravitação efetiva, $G_{\text{eff}} = 4G/3$, é postulada.

A prescrição de Sheth e Tormen consiste num ajuste analítico que consegue, a partir do espectro linear de potência de matéria não relativística, prever o número de halos em função da massa desses objetos nas simulações do modelo Λ CDM com significativa precisão (Jenkins, Frenk, White, Colberg, Cole, Evrard, Couchman & Yoshida 2001). A formação de um halo de matéria não relativística envolve perturbações no regime não linear e, portanto, a existência de um método analítico apto a descrever, em Λ CDM, a quantidade desses objetos

para diferentes valores de parâmetros é notável.

Uma das hipóteses básicas da prescrição de Sheth Tormen é o modelo de colapso esférico. Esse tipo de colapso supõe uma perturbação inicial de matéria não relativística com simetria esférica e com um perfil de densidade do tipo *top hat* no interior de um halo. Além disso, ele também postula a manutenção dessas características durante todo o colapso. Tais pressupostos possibilitam integrar as equações da continuidade e de Euler, no contexto da mecânica newtoniana, para matéria não relativística inserida num universo em expansão (Cooray & Sheth 2002, Schmidt et al. 2009).

Para delinear a formação de halos em teorias $f(R)$, Schmidt et al. (2009) aplicam o modelo de colapso esférico a dois casos limites. O primeiro consiste na gravitação newtoniana não modificada ($G_{\text{eff}} = G$). O segundo corresponde, por sua vez, ao caso em que o valor da constante universal da gravitação é ampliado por um fator $G_{\text{eff}} = 4G/3$. Essa modificação é, na ausência do efeito camaleão, prevista pelas equações (9.5) e (9.6) no limite $k \gg \lambda_{fR}|_{R=R_{\text{dS}}}$, em que λ_{fR} é o comprimento Compton, definido na expressão (3.47).

O modelo de colapso esférico afirma que halos virializados num determinado valor z do desvio para o vermelho têm, inicialmente, uma densidade de matéria não relativística igual a

$$\delta_i = \begin{cases} 1.686D(z) & \text{gravidade normal } (G_{\text{eff}} = G) \\ 1.706D(z) & \text{gravidade modificada } (G_{\text{eff}} = \frac{4G}{3}) \end{cases}, \quad (9.7)$$

em que $D(z)$ é o fator de crescimento, definido como a solução crescente da equação de evolução, no regime linear, das perturbações de densidade de matéria não relativística. As constantes numéricas são independentes da massa desses objetos. Portanto, a equação (9.7) prediz, de modo equivalente, que, o colapso de um halo ocorre quando a densidade de matéria não relativística for igual a uma sobredensidade crítica, denominada δ_c , ao extrapolar as condições iniciais utilizando a teoria de perturbação linear. No caso da gravidade newtoniana, $\delta_c = 1.686$, enquanto no caso da gravidade modificada, $\delta_c = 1.706$.

Mediante a utilização da propriedade citada no parágrafo anterior, é possível estimar a quantidade de halos existente em $z = 0$, a partir de um estudo estatístico do campo de flutuações iniciais. Ela é calculada a partir da integral da função $n(M)$, que denota o número de halos, em $z = 0$, com massa $M = M_{300}$. No universo primitivo, as sobredensidades de matéria não relativística satisfazem a relação $\delta \ll 1$ e, por conseguinte, uma massa M ocupa

uma escala de distância da ordem de grandeza de

$$\mathcal{R} = \frac{3M}{4\pi\bar{\rho}_m}, \quad (9.8)$$

em que $\bar{\rho}_m$ é a densidade não perturbada de matéria não relativística. Assim, para o cálculo de $n(M)$, o raio \mathcal{R} define o tamanho do filtro *top hat* utilizado no campo de flutuações iniciais.

A equação (9.7) afirma que todas as regiões esféricas, com sobredensidade de matéria maior que δ_c , correspondem a um halo virializado com massa maior que M em $z = 0$. De acordo com Sheth & Tormen (1999), o número de regiões existente, no campo de flutuações iniciais, com densidade $\delta > \delta_c$ e com massa contida no intervalo $[M, M + dM]$, é igual a

$$\nu f(\nu) = A(p) (1 + (q\nu)^{-p}) \left(\frac{q\nu}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-q\nu/2}. \quad (9.9)$$

Nessa expressão, q e p são parâmetros livres e $A(p)$ é um fator de normalização. Para o modelo Λ CDM, o melhor ajuste ocorre com $p \approx 3 \times 10^{-1}$ e $q \approx 7.5 \times 10^{-1}$, o que implica $A(p) \approx 3.2 \times 10^{-1}$. A quantidade ν é igual à razão $\delta_c^2/\sigma(M)^2$ por definição. A função

$$\sigma^2(M) = \int \frac{dk}{k} \frac{k^3 P^{\text{linear}}(k)}{2\pi^2} |W(k\mathcal{R})|^2, \quad (9.10)$$

por sua vez, equivale à variância da distribuição de halos com massa M , calculada por meio da transformada de Fourier do espectro de potência linear, $P^{\text{linear}}(k)$, multiplicado por um peso,

$$W(x) = \frac{3}{x^3} (\sin(x) - x \cos(x)), \quad (9.11)$$

igual à transformada de Fourier do filtro *top hat*.

Por fim, a função $n(M)$ é, na prescrição de Sheth e Tormen, igual a

$$n(M) = \frac{\bar{\rho}_m}{M} \nu f(\nu) \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dM}. \quad (9.12)$$

Na figura (9.6), os limites do contorno em azul correspondem à estimativa (9.12), considerando os dois casos limites descritos na expressão (9.7). Em ambas as situações, o espectro

de potência linear é calculado utilizando a teoria de perturbação das teorias $f(R)$, o que implica valores distintos para a variância $\sigma(M)^2$, quando comparado ao modelo Λ CDM. Nas situações em que o efeito camaleão é relevante, essa prescrição não está em consonância com a simulação, principalmente com relação ao número de halos de baixa massa ($M < 1 \times 10^{14} M_{\odot}/h$).

Além do número de halos, o perfil de densidade no interior de cada halo também pode ser analisado (Schmidt et al. 2009). A forma funcional utilizada neste ajuste é nomeada perfil NFW e é exposta na igualdade (Navarro, Frenk & White 1997).

$$\rho_{\text{NFW}} = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(1+r/r_s)^2}. \quad (9.13)$$

O parâmetro r_s é da ordem de grandeza do raio do halo e ρ_s é um fator de normalização, pois a integral, de 0 a ∞ , desse perfil tem que ser igual a massa, M , do objeto.

Os resultados das simulações, comparados ao melhor ajuste de parâmetros do perfil (9.13) para o modelo Λ CDM, estão expostos na figura 9.7. A partir desse gráfico, é possível concluir que o modelo (6.2) possui um perfil muito semelhante ao previsto por Λ CDM, especialmente na região mais interna do halo. Também é interessante ressaltar que esta semelhança é válida para todas as faixas relevantes de massa e que camaleão não é muito relevante na construção desse perfil, pois, conforme já mencionado, para o caso $h_{R0} = 1 \times 10^{-4}$ este efeito atua com intensidade apenas em alto desvio para o vermelho. Logo, mesmo na ausência do efeito camaleão, as discrepâncias com relação a Λ CDM não são significativas.

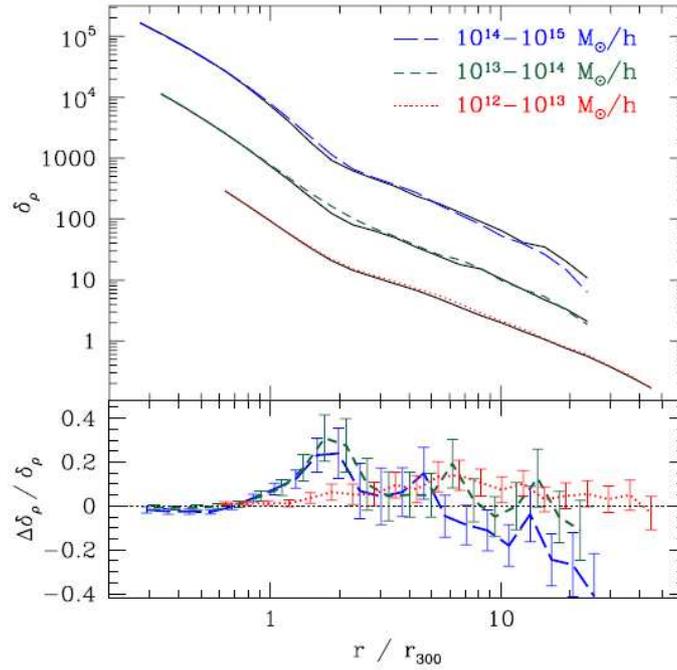


Figura 9.7: A figura superior apresenta o ajuste do perfil de densidade, $\rho_{\text{NFW}} = \delta_p$, para três distintas regiões de massa do halo, previsto, no caso em que $h_{R0} = 1 \times 10^{-4}$, pelo modelo (6.2) (linhas coloridas e não contínuas) e pelo modelo ΛCDM (linha preta e contínua). Os perfis para halos de massa, M , contida nos intervalos $[1 \times 10^{13}, 1 \times 10^{14}] M_{\odot}/h$ e $[1 \times 10^{14}, 1 \times 10^{15}] M_{\odot}/h$ foram, respectivamente, multiplicados por 10 e 100, para facilitar a visualização. Para os halos mais massivos esses perfis foram obtidos nas simulações em que $L = 128 \text{ Mpc}/h$, enquanto nos halos menos massivos, eles foram calculados nas simulações em que $L = 64 \text{ Mpc}/h$. Em contrapartida, a figura inferior apresenta os desvios relativos entre os perfis previsto por esse modelo e por ΛCDM

Capítulo 10

Conclusões

Nesta dissertação, os principais aspectos referentes à dinâmica prevista pelas teorias $f(R)$ foram abordados. *A priori*, a generalização da ação de Einstein-Hilbert para funções não lineares no escalar de Ricci origina novas possibilidades, nem todas viáveis. Para restringir a forma funcional da função $f(R)$, distintas propriedades foram analisadas. Por fim, alguns resultados originais foram propostos ao longo deste trabalho, nem todos descritos em Miranda et al. (2009b).

Em primeiro lugar, a solução cosmológica foi examinada e a exigência de existência de uma fase transitória dominada pela matéria não relativística, seguida por um era estável e acelerada, foi aplicada (Amendola, Gannouji, Polarski & Tsujikawa 2007). Nessa discussão, foi demonstrado que existem modelos aparentemente promissores não prevêm um comportamento para o fator de escala compatível com a formação de estrutura ou a física da Radiação Cósmica de Fundo. Além disso, mostramos aqui que a utilização de determinadas definições, para densidade de energia e pressão associada à energia escura, origina divergências na equação de estado dessa componente (Amendola & Tsujikawa 2008) sem, todavia, alterar a evolução de variáveis físicas e geométricas, tais como o fator de escala e a densidade de energia de matéria não relativística.

Nesse estudo da cosmologia, a utilização das expressões (2.26) e (2.27), para os parâmetros de energia escura, elimina a evolução singular descrita no parágrafo anterior (Miranda et al. 2009b). Por último, o modelo (2.56) foi analisado. De maneira complementar aos resultados apresentados em (Miranda et al. 2009b), o caso $\alpha < 1$ também produz uma cosmologia viável, por causa da existência do ponto fixo P_6 com as características de um atrator

dinâmico e produtor de uma fase acelerada, procedida por uma fase dominada pela matéria em consequência da existência do ponto P_5 .

Em segundo lugar, a dinâmica dos elementos de uma métrica estática e esfericamente simétrica prevista pelas teorias $f(R)$ foi analisada (Chiba et al. 2007). Nela, ficou evidente que o método perturbativo, consagrado na teoria da Relatividade Geral, prediz resultados em franca contradição com as observações. Esse comportamento é um reflexo das características introduzidas pelo novo grau de liberdade escalar existente nesses modelos.

Em terceiro lugar, o mecanismo de camaleão foi apresentado (Khoury & Weltman 2004a). Ele é o responsável pela compatibilização entre as previsões das teorias $f(R)$ e os vínculos locais da gravitação. A principal consequência do efeito camaleão é a supressão, nas soluções do tipo *thin shell*, da intensidade da nova força gravitacional induzida, pois ele mantém o campo escalar preso ao mínimo do potencial efetivo, governante da dinâmica desse sistema (Khoury & Weltman 2004a).

Em quarto lugar, a evolução temporal das perturbações na cosmologia foi obtida no regime linear (de La Cruz-Dombriz et al. 2008). Ao contrário do que ocorre na Relatividade Geral, a sobredensidade de matéria não relativística é determinada por uma equação diferencial de quarta ordem no tempo conforme. No limite newtoniano, válido em escalas muito menores ao raio de Hubble, e quase estático, válidos apenas em modelos capazes de gerar uma fase dominada pela matéria não relativística, os coeficientes proporcionais as derivadas quarta e terceira das perturbações, com respeito ao tempo conforme, podem ser desprezados (de La Cruz-Dombriz et al. 2008).

É interessante reafirmar que o regime linear subdivide-se em dois (Hu & Sawicki 2007b) nas teorias $f(R)$. No primeiro, válido para vetores de onda com módulo $k < 1 \times 10^{-1} \text{ Mpc}^{-1}/h$, a presença do efeito camaleão é irrelevante. Nesse limite, a força gravitacional efetiva é ampliada, tendo, no limite $k/\lambda_{f_R} \rightarrow 0$, a $(4/3)G$. Em contrapartida, no intervalo $1 \times 10^{-1} \text{ Mpc}^{-1}/h < k < 1 \times \text{ Mpc}^{-1}/h$, esse efeito tem que ser considerado, por causa das altas densidades médias presentes nos halos de matéria escura. Por outro lado, o estudo de lentes em vazios, por exemplo, pode representar um interessante teste desses modelos, mesmo em pequenas escalas, devido a dependência do efeito camaleão com a densidade do meio.

Em quinto lugar, as condições de estabilidade de soluções cosmológicas semelhantes à

prevista pela teoria da Relatividade Geral, foram demonstradas (Dolgov & Kawasaki 2003, Faraoni 2006, Sawicki & Hu 2007). Em particular, modelos $f(R)$ dotados de uma derivada $f_{RR} < 0$ não são viáveis, pois originam uma cosmologia incompatível com a formação de estruturas, por exemplo (Dolgov & Kawasaki 2003, Sawicki & Hu 2007, Amendola, Gannouji, Polarski & Tsujikawa 2007). Basicamente, nesses modelos a fase dominada pela radiação é sucedida por uma codominância entre a matéria não relativística e a energia escura, entendida nesse contexto como as correções nas equações de campo, com relação às equações de campo de Einstein, em que $w_{\text{eff}} = 1/3$ (Amendola, Gannouji, Polarski & Tsujikawa 2007).

Uma análise das equações de Boltzman permite concluir que o comportamento do fator de escala descrito no parágrafo anterior é incompatível com as observações, pois origina um decaimento do módulo dos potenciais perturbativos, que, por sua vez, causa um crescimento apenas logarítmico das sobredensidades de matéria nas estruturas em larga escala. Além disso, a relação $f_R > 0$ foi pressuposta, pois valores negativos desse parâmetro permitem a existência de uma constante gravitacional efetiva negativa.

Em sexto lugar, a possível existência de singularidades no escalar de Ricci durante a evolução cosmológica foi debatida (Frolov 2008, Appleby & Battye 2007). Em particular, foi demonstrado que modelos, até então consideráveis viáveis, podem prever uma evolução catastrófica. Em particular, foi demonstrado, nessa dissertação, que o modelo (6.4) é bastante susceptível a essa dinâmica. Nesse ponto, Miranda et al. (2009b) demonstram que modelos infravermelhos dotados de uma barreira infinita no potencial $V(\chi)$, definido em 6.15, são aptos a produzirem soluções não singulares. Também foi demonstrado que correções ultravioletas são capazes de resolver essa questão (Dev et al. 2008).

O segundo método, no entanto, tem a vantagem de permitir que o potencial efetivo, $V_{\text{eff}}(\chi)$ tenha um mínimo em $\chi = f_R \approx 1 - 1 \times 10^{-6}$. Essa proximidade é essencial para a concordância desses modelos com os testes clássicos da gravitação (Capozziello & Tsujikawa 2008). Por último, foi apresentada, pela primeira vez, uma parametrização para a dependência da variação do escalar de Ricci com relação a densidade do meio, para analisar as consequências do efeito camaleão.

Em sétimo lugar, o problema relativo à inexistência de estrelas relativísticas, no contexto das teorias $f(R)$, também foi analisado (Kobayashi & Maeda 2008). Em particular, o exemplo proposto por Miranda et al. (2009b) é compatível com a presença de objetos compactos e

não exige ajustes tão finos nas condições de contorno. A inclusão de correções ultravioletas também foi estudada e, aparentemente, os vínculos, resultantes da imposição da existência de estrelas dotadas de um potencial newtoniano superficial elevado ($\Phi \geq 0.2$), eram incompatíveis com a modelagem de inflação por estes parâmetros adicionais (Kobayashi & Maeda 2009). Entretanto Upadhye & Hu (2009) demonstraram uma falha nas conclusões enunciadas em Kobayashi & Maeda (2008) e na consequente incompatibilidade desses astros com modelos dotados de uma barreira finita no potencial $V(\chi)$, separando a solução de vácuo da singularidade.

Em oitavo lugar, os testes clássicos da gravitação foram aplicados para diferentes modelos (Capozziello & Tsujikawa 2008). Foi demonstrado que a presença de uma barreira infinita no potencial efetivo torna o modelo proposto em (Miranda et al. 2009b) incompatível com as observações, pois essa altura está diretamente vinculada com o afastamento do valor do campo, que minimiza o potencial efetivo, do ponto em que $f_R = 1$ (Thongkool, Sami, Gannouji & Jhingan 2009). Por causa desse fato, os modelos (6.2), (6.3) e (6.4), dotados de uma barreira finita e reduzida, estão em concordância com os testes clássicos da gravitação.

Por último, a equação de evolução linear das perturbações foi aplicada ao caso particular enunciado por Miranda et al. (2009b). A partir dos resultados, foi demonstrado que a existência de uma barreira infinita afeta as previsões relativas não só as observações locais, como também ao espectro de perturbações da matéria não relativística (de La Cruz-Dombriz et al. 2009). No entanto, existem incertezas quer ainda permitem contabilizar esse modelo com o espectro de potências linear (Miranda et al. 2009a).

Também foram apresentadas no capítulo 4 as simulações descritas em (Oyaizu 2008). Nesse trabalho, o espectro de potência, previsto pelo modelo (6.2), foi exibido, incluindo a influência do efeito camaleão (Oyaizu et al. 2008). As previsões para o modelo de halo (Cooray & Sheth 2002) também foram estudadas, a partir de soluções limite para as equações do modelo de colapso esférico (Schmidt et al. 2009). Por fim, essa dissertação mostrou, baseado no trabalho (Schmidt et al. 2009), que a correta integração do modelo de colapso esférico é essencial para uma boa concordância entre o modelo de halo e as observações. Em particular, os novos resultados, apresentados em Brax et al. (2010), para o modelo de colapso esférico podem produzir interessantes implicações.

Bibliografia

- Amendola, L., Gannouji, R., Polarski, D. & Tsujikawa, S. (2007), ‘Conditions for the cosmological viability of $f(R)$ dark energy models’, *Physical Review D* **75**(8), 083504.
- Amendola, L., Polarski, D. & Tsujikawa, S. (2007), ‘Are $f(R)$ Dark Energy Models Cosmologically Viable?’, *Physical Review Letters* **98**(13), 131302.
- Amendola, L. & Tsujikawa, S. (2008), ‘Phantom crossing, equation-of-state singularities, and local gravity constraints in $f(R)$ models’, *Physics Letters B* **660**, 125–132.
- Appleby, S. A. & Battye, R. A. (2008), ‘Aspects of cosmological expansion in $F(R)$ gravity models’, *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics* **5**, 19.
- Appleby, S. & Battye, R. (2007), ‘Do consistent $F(R)$ models mimic general relativity plus Λ ?’, *Physics Letters B* **654**, 7–12.
- Babichev, E. & Langlois, D. (2009a), ‘Relativistic stars in $f(R)$ and scalar-tensor theories’, *ArXiv e-prints* .
- Babichev, E. & Langlois, D. (2009b), ‘Relativistic stars in $f(R)$ gravity’, *Physical Review D* **80**(12), 121501.
- Borisov, A. & Jain, B. (2009), ‘Three-point correlations in $f(R)$ models of gravity’, *Physical Review D* **79**(10), 103506.
- Brax, P., Rosenfeld, R. & Steer, D. A. (2010), ‘Spherical Collapse in Chameleon Models’, *ArXiv e-prints* .
- Brax, P., van de Bruck, C., Davis, A.-C. & Shaw, D. J. (2008), ‘ $f(R)$ gravity and chameleon theories’, *Physical Review D* **78**(10), 104021.

- Capozziello, S., Cardone, V. F., Carloni, S. & Troisi, A. (2003), ‘Curvature Quintessence Matched with Observational Data’, *International Journal of Modern Physics D* **12**, 1969–1982.
- Capozziello, S. & Tsujikawa, S. (2008), ‘Solar system and equivalence principle constraints on $f(R)$ gravity by the chameleon approach’, *Physical Review D* **77**(10), 107501.
- Carroll, S. M. (2004), *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*.
- Carroll, S. M., Duvvuri, V., Trodden, M. & Turner, M. S. (2004), ‘Is cosmic speed-up due to new gravitational physics?’, *Physical Review D* **70**(4), 043528.
- Chiba, T., Smith, T. L. & Erickcek, A. L. (2007), ‘Solar System constraints to general $f(R)$ gravity’, *Physical Review D* **75**(12), 124014.
- Cooray, A. & Sheth, R. (2002), ‘Halo models of large scale structure’, *Physics Reports* **372**, 1–129.
- de La Cruz-Dombriz, A., Dobado, A. & Maroto, A. L. (2008), ‘Evolution of density perturbations in $f(R)$ theories of gravity’, *Physical Review D* **77**(12), 123515.
- de La Cruz-Dombriz, A., Dobado, A. & Maroto, A. L. (2009), ‘Comment on “Viable Singularity-Free $f(R)$ Gravity without a Cosmological Constant”’, *Physical Review Letters* **103**(17), 179001.
- Dev, A., Jain, D., Jhingan, S., Nojiri, S., Sami, M. & Thongkool, I. (2008), ‘Delicate $f(R)$ gravity models with a disappearing cosmological constant and observational constraints on the model parameters’, *Physical Review D* **78**(8), 083515.
- Dicke, R. H. (1962), ‘Mach’s Principle and Invariance under Transformation of Units’, *Physical Review* **125**, 2163–2167.
- Dolgov, A. D. & Kawasaki, M. (2003), ‘Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion?’, *Physics Letters B* **573**, 1–4.
- Eisenstein, D. J. & Hu, W. (1998), ‘Baryonic Features in the Matter Transfer Function’, *Astrophysical Journal* **496**, 605–+.

- Faraoni, V. (2006), ‘Matter instability in modified gravity’, *Physical Review D* **74**(10), 104017.
- Faulkner, T., Tegmark, M., Bunn, E. F. & Mao, Y. (2007), ‘Constraining f(R) gravity as a scalar-tensor theory’, *Physical Review D* **76**(6), 063505.
- Flanagan, É. É. (2004), ‘REPLY TO COMMENT: The conformal frame freedom in theories of gravitation’, *Classical and Quantum Gravity* **21**, 3817–3829.
- Frolov, A. V. (2008), ‘Singularity Problem with f(R) Models for Dark Energy’, *Physical Review Letters* **101**(6), 061103.
- Hamilton, A. J. S., Kumar, P., Lu, E. & Matthews, A. (1991), ‘Reconstructing the primordial spectrum of fluctuations of the universe from the observed nonlinear clustering of galaxies’, *Astrophysical Journal, Part 2 - Letters* **374**, L1–L4.
- Hindawi, A., Ovrut, B. A. & Waldram, D. (1996), ‘Consistent spin-two coupling and quadratic gravitation’, *Physical Review D* **53**, 5583–5596.
- Hu, W. & Sawicki, I. (2007a), ‘Models of f(R) cosmic acceleration that evade solar system tests’, *Physical Review D* **76**(6), 064004.
- Hu, W. & Sawicki, I. (2007b), ‘Parametrized post-Friedmann framework for modified gravity’, *Physical Review D* **76**(10), 104043.
- Jenkins, A., Frenk, C. S., White, S. D. M., Colberg, J. M., Cole, S., Evrard, A. E., Couchman, H. M. P. & Yoshida, N. (2001), ‘The mass function of dark matter haloes’, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **321**, 372–384.
- Khoury, J. & Weltman, A. (2004a), ‘Chameleon cosmology’, *Physical Review D* **69**(4), 044026.
- Khoury, J. & Weltman, A. (2004b), ‘Chameleon Fields: Awaiting Surprises for Tests of Gravity in Space’, *Physical Review Letters* **93**(17), 171104.
- Kobayashi, T. & Maeda, K. (2008), ‘Relativistic stars in f(R) gravity, and absence thereof’, *Physical Review D* **78**(6), 064019.

- Kobayashi, T. & Maeda, K. (2009), ‘Can higher curvature corrections cure the singularity problem in f(R) gravity?’, *Physical Review D* **79**(2), 024009.
- Linder, E. V. (2009), ‘Exponential gravity’, *Physical Review D* **80**(12), 123528.
- Martino, M. C. & Sheth, R. K. (2009), ‘Density profiles and voids in modified gravity models’, *ArXiv e-prints* .
- Martino, M. C., Stabenau, H. F. & Sheth, R. K. (2009), ‘Spherical collapse and cluster counts in modified gravity models’, *Physical Review D* **79**(8), 084013.
- Miranda, V., Jorás, S. E., Waga, I. & Quartin, M. (2009*a*), ‘Miranda et al. Reply:’, *Physical Review Letters* **103**(17), 179002–+.
- Miranda, V., Jorás, S. E., Waga, I. & Quartin, M. (2009*b*), ‘Viable Singularity-Free f(R) Gravity without a Cosmological Constant’, *Physical Review Letters* **102**(22), 221101.
- Motohashi, H., Starobinsky, A. A. & Yokoyama, J. (2010), ‘Phantom Boundary Crossing and Anomalous Growth Index of Fluctuations in Viable f(R) Models of Cosmic Acceleration’, *Progress of Theoretical Physics* **123**, 887–902.
- Navarro, I. & Van Acoleyen, K. (2007), ‘f(R) actions, cosmic acceleration and local tests of gravity’, *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics* **2**, 22.
- Navarro, J. F., Frenk, C. S. & White, S. D. M. (1997), ‘A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering’, *Astrophysical Journal* **490**, 493–+.
- Nojiri, S. & Odintsov, S. D. (2003), ‘Modified gravity with negative and positive powers of curvature: Unification of inflation and cosmic acceleration’, *Physical Review D* **68**(12), 123512.
- Oyaizu, H. (2008), ‘Nonlinear evolution of f(R) cosmologies. I. Methodology’, *Physical Review D* **78**(12), 123523.
- Oyaizu, H., Lima, M. & Hu, W. (2008), ‘Nonlinear evolution of f(R) cosmologies. II. Power spectrum’, *Physical Review D* **78**(12), 123524.

- Pogosian, L. & Silvestri, A. (2008), 'Pattern of growth in viable $f(R)$ cosmologies', *Physical Review D* **77**(2), 023503.
- Sawicki, I. & Hu, W. (2007), 'Stability of cosmological solutions in $f(R)$ models of gravity', *Physical Review D* **75**(12), 127502.
- Schmidt, F., Lima, M., Oyaizu, H. & Hu, W. (2009), 'Nonlinear evolution of $f(R)$ cosmologies. III. Halo statistics', *Physical Review D* **79**(8), 083518.
- Seifert, M. D. (2007), 'Stability of spherically symmetric solutions in modified theories of gravity', *Physical Review D* **76**(6), 064002.
- Seifert, M. D. & Wald, R. M. (2007), 'General variational principle for spherically symmetric perturbations in diffeomorphism covariant theories', *Physical Review D* **75**(8), 084029.
- Sheth, R. K. & Tormen, G. (1999), 'Large-scale bias and the peak background split', *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **308**, 119–126.
- Smith, R. E., Peacock, J. A., Jenkins, A., White, S. D. M., Frenk, C. S., Pearce, F. R., Thomas, P. A., Efstathiou, G. & Couchman, H. M. P. (2003), 'Stable clustering, the halo model and non-linear cosmological power spectra', *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society* **341**, 1311–1332.
- Sotiriou, T. P. & Faraoni, V. (2008), ' $f(R)$ Theories Of Gravity', *ArXiv e-prints* .
- Stabenau, H. F. & Jain, B. (2006), 'N-body simulations of alternative gravity models', *Physical Review D* **74**(8), 084007.
- Starobinsky, A. A. (1980), 'A new type of isotropic cosmological models without singularity', *Physics Letters B* **91**, 99–102.
- Starobinsky, A. A. (2007), 'Disappearing cosmological constant in $f(R)$ gravity', *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* **86**, 157–163.
- Tamaki, T. & Tsujikawa, S. (2008), 'Revisiting chameleon gravity: Thin-shell and no-shell fields with appropriate boundary conditions', *Physical Review D* **78**(8), 084028.

- Tegmark, M., Eisenstein, D. J., Strauss, M. A., Weinberg, D. H., Blanton, M. R., Frieman, J. A., Fukugita, M., Gunn, J. E., Hamilton, A. J. S., Knapp, G. R., Nichol, R. C., Ostriker, J. P., Padmanabhan, N., Percival, W. J., Schlegel, D. J., Schneider, D. P., Scoccimarro, R., Seljak, U., Seo, H., Swanson, M., Szalay, A. S., Vogeley, M. S., Yoo, J., Zehavi, I., Abazajian, K., Anderson, S. F., Annis, J., Bahcall, N. A., Bassett, B., Berlind, A., Brinkmann, J., Budavari, T., Castander, F., Connolly, A., Csabai, I., Doi, M., Finkbeiner, D. P., Gillespie, B., Glazebrook, K., Hennessy, G. S., Hogg, D. W., Ivezić, Ž., Jain, B., Johnston, D., Kent, S., Lamb, D. Q., Lee, B. C., Lin, H., Loveday, J., Lupton, R. H., Munn, J. A., Pan, K., Park, C., Peoples, J., Pier, J. R., Pope, A., Richmond, M., Rockosi, C., Scranton, R., Sheth, R. K., Stebbins, A., Stoughton, C., Szapudi, I., Tucker, D. L., vanden Berk, D. E., Yanny, B. & York, D. G. (2006), ‘Cosmological constraints from the SDSS luminous red galaxies’, *Physical Review D* **74**(12), 123507.
- Thongkool, I., Sami, M. & Choudhury, S. R. (2009), ‘How delicate are the $f(R)$ gravity models with a disappearing cosmological constant?’, *Physical Review D* **80**(12), 127501.
- Thongkool, I., Sami, M., Gannouji, R. & Jhingan, S. (2009), ‘Constraining $f(R)$ gravity models with disappearing cosmological constant’, *Physical Review D* **80**(4), 043523.
- Upadhye, A. & Hu, W. (2009), ‘Existence of relativistic stars in $f(R)$ gravity’, *Physical Review D* **80**(6), 064002.
- Wald, R. M. (1984), *General relativity*.
- Weinberg, S. (2008), *Cosmology*, Oxford University Press.
- Will, C. M. (1993), *Theory and Experiment in Gravitational Physics*.
- Will, C. M. (2006), ‘The Confrontation between General Relativity and Experiment’, *Living Reviews in Relativity* **9**, 3.