

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Observatório do Valongo

Alvaro Silva Iribarrem

**CONTAGEM RELATIVÍSTICA DE FONTES
COSMOLÓGICAS E A FUNÇÃO DE
LUMINOSIDADE GALÁCTICA**

2009



Alvaro Silva Iribarrem

**CONTAGEM RELATIVÍSTICA DE FONTES
COSMOLÓGICAS E A FUNÇÃO DE
LUMINOSIDADE GALÁCTICA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Astronomia, Observatório do Valongo, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Astronomia.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Byrro Ribeiro.

Rio de Janeiro
Setembro de 2009

Iribarrem, Alvaro S.

Contagem relativística de fontes cosmológicas e a função de luminosidade galáctica/ Alvaro Silva Iribarrem- Rio de Janeiro: UFRJ/ OV, 2009

xii, 62f.:il; 30 cm

Orientador: Marcelo B. Ribeiro

Dissertação (Mestrado em Astronomia) - UFRJ/ OV/ Programa de Pós-graduação em Astronomia, 2009.

Referências Bibliográficas: f: 75-77.

1.Galáxias: Função de Luminosidade 2.Galáxias: estatísticas radiais
3.Cosmologia: Estrutura de larga escala do universo I. Ribeiro, Marcelo B.
II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Observatório do Valongo,
Programa de Pós-graduação em Astronomia, 2009 III. Título.

Resumo

O objetivo principal desse trabalho é estender o estudo da distribuição radial de galáxias, seguindo Ribeiro (2005) e Albani *et al.* (2007) para os novos intervalos de desvio para o vermelho que os recentes levantamentos de galáxias estão alcançando e comparar os resultados obtidos para esses novos dados com aqueles previamente publicados. Para fazê-lo, as Funções de Luminosidade (FL) obtidas de dois catálogos distintos, o de galáxias selecionadas na banda R do levantamento CNOC2 e o de galáxias selecionadas na banda I do levantamento FORS Deep Field (FDF), são estudadas no contexto do modelo proposto por Ribeiro & Stoeger (2003) conectando a teoria da contagem na cosmologia relativística com os dados e prática astronômicas da FL. Expressões gerais são derivadas para a contagem diferencial, densidade relativística por fonte, densidade de massa, densidades numéricas diferenciais e outros observáveis relacionados e é descrita uma estratégia numérica para obter tais grandezas usando o formalismo geral detalhado aqui. Tais equações são então especializadas para modelos cosmológicos que assumam a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Funções de seleção em cinco bandas diferentes são calculadas a partir dos dados da FL do levantamento FDF e para três diferentes classes espectrais a partir dos dados da FL do levantamento CNOC2, permitindo que os testes de consistência delineados em Ribeiro & Stoeger, como exemplo de sua conexão proposta, sejam aplicados aos dados, comparando as grandezas teóricas obtidas para a cosmologia adotada na definição de volume da FL com suas contrapartes observacionais obtidas diretamente dos dados da FL. É também proposto um novo teste de consistência, em que é estudada a evolução com o desvio para o vermelho da função de completudeza. Tal função relaciona diretamente as contagens numéricas diferenciais teórica e observacional. Como consequência, é proposto um modelo puramente empírico para a evolução com o desvio para o vermelho da densidade numérica em volume comóvel e é mostrado que tal evolução é sensivelmente influenciada pelo tipo de galáxia considerado. Densidades radiais são então obtidas para as diferentes definições observacionais de distâncias cosmológicas usando a contagem diferencial observada em ambos os catálogos estudados aqui. Os resultados indicam que é perfeitamente possível obter inomogeneidade observacional para um modelo cosmológico espacialmente homogêneo. Os resultados preliminares de Albani *et al.* (2007) de um comportamento de lei de potência em altos desvios para o vermelho quando as densidades numéricas são definidas em termos das distâncias por luminosidade ou por desvio para o vermelho são também confirmados.

Abstract

The main goal of this work is to extend the study of the radial distribution of galaxies, following Ribeiro (2005) and Albani *et al.* (2007) to the new redshift ranges recent galaxy surveys are reaching and compare the results obtained for these new data with the ones previously published. To do so, the galaxy luminosity functions obtained from two different datasets, the R-band selected one of the CNOC2 galaxy survey and that of the I-band selected in the FORS Deep Field (FDF) galaxy survey, are studied in the context of the model advanced in Ribeiro & Stoeger (2003) connecting the relativistic cosmology number counts theory with the LF astronomical data and practice. General expressions are derived for the differential number counts, relativistic density per source, observed mass density, differential number densities and other related observables and is described a complete numerical approach in obtaining this quantities using the general formalism detailed here. These equations are then specialized for cosmological models that assume the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metric. Selection functions in five different bandwidths are calculated from the LF data of the FDF survey, and for three different spectral classes from the LF data of the CNOC2 survey, allowing the consistency tests outlined in Ribeiro & Stoeger (2003) as an example of their proposed connection, to be applied to the data, by comparing the theoretical quantities derived for the cosmology assumed in the LF's volume definition with their observational counterparts obtained directly from the LF data. It is also advanced a new consistency test, in which the redshift evolution of the completeness function is studied. This function directly relates the observed and theoretical differential number counts and is therefore a more clear way of looking to the consistency between practice and theory of the galactic number counts. As a consequence, it is proposed a purely empirical model for the redshift evolution of the number density in comoving volume and is shown that the evolution of the galaxies is sensibly influenced by their spectral class. Radial densities are then obtained for the different cosmological distance definitions using the observed differential number counts for both the datasets studied here. The results indicate that it is perfectly possible to obtain observational inhomogeneity for a spatially homogeneous cosmological model. The preliminary results of Albani *et al.* (2007) of a power-law behavior at high redshifts when the number densities are defined in terms of the luminosity and redshift distances are also confirmed.

Agradecimentos

Pensando no que escrever nessa parte da dissertação pude notar a sorte que tenho de contar com tantas pessoas tão especiais na minha vida. Sem mais delongas, aqui vão meus mais sinceros agradecimentos.

A minha família, por ter sido e ainda ser meu mais seguro porto. Se hoje os valores que trago comigo me são tão preciosos é porque cresci entre os que os praticavam e aprendi a vivê-los mesmo antes de entendê-los. Em especial, a meu pai, Leoni Jaires Iribarrem, pelo exemplo de honestidade, dedicação, perseverança e superação. Pelo esforço continuado e diligente em garantir as condições para que eu pudesse hoje caminhar sozinho. A minha mãe, Maria Angélica Nascimento da Silva, pelo amor e apoio incondicionais e por nunca ter desistido da muitas vezes dolorosa tarefa de me educar. A minha irmã, Iasmim Silva Iribarrem, pela amizade fiel, pelos longos diálogos e suas sínteses tão proveitosas e todas as vezes que me serviu de consciência. A meu avô, Denizard Valladares Silva, pelos discretos mas sensíveis cuidado e preocupação constantes. A minhas avós, Maria Lourença Lucena Iribarrem e Shirley Nascimento da Silva por terem tornado a minha infância especial e memorável.

A meus amigos, Antonio Leandro C. A. Nascimento, Anna Lygia Costa, Bernardo Baeta Neves Strassburg, Bernardo Araújo, Bernardo Barros, Bernardo Ribeiro, Carlos Henrique Amato, Daniel Ribeiro, Felipe Drummond e Leonardo Acquarone, pelo conforto e a segurança da companhia e por me ajudar, com suas virtudes e limitações, a reconhecer as minhas próprias e buscar me tornar melhor. Por serem, enfim, extensão escolhida da minha família.

A Renata Couto e sua família, por terem me acolhido tão carinhosamente entre os seus e me apoiado nos momentos mais difíceis da minha graduação. A Patrícia Diaz pela amizade inabalável, pelo incentivo a ingressar no mestrado trabalhando, pela convivência, que me tornou muito mais centrado e por seus pontos de vista, que me fizeram verdadeiramente mais humano.

A Orlandino Otávio de Sousa Andrade, pela chama da inquietação agostiniana acendida durante suas aulas. Pela confiança em minha capacidade e pelo exemplo de educador comprometido com o aprendizado, de cidadão consciente que luta pelo que acredita, que valoriza a tolerância e a coerência de discurso e de ação.

A Marcelo Byrro Ribeiro pela paciência e compreensão com as dificuldades que meu

trabalho muitas vezes impunha. Pelos conselhos e incentivos pertinentes nos momentos de dúvida profissional. Pela notável disposição a dedicar horas semanais para que eu viesse a ter uma formação acadêmica completa, que incluísse não somente o domínio das ferramentas específicas da pesquisa, mas também um entendimento amplo do processo acadêmico em si.

Aos colegas da Física, Bernardo Medina, Bruno Mintz, Bruno Lazarotto, Bruno Moraes, Carlos Zarro, Felipe Poulis, Fernando Rodrigues, Isa Oliveira, Kazuyoshi Akiba, Leonardo Grigorio, Patrícia Barbosa, Rafael Perez, Thiago Gonçalves; da Astronomia, Alex Dias de Oliveira, Andrés Perez, Carlos Molina, Eduardo Monfardini Penteadó, Felipe Braga Ribas, Gustavo Dopcke, Iker Olivares Salaverri, Letícia Dutra Ferreira, Marcelo de Lima Leal Ferreira, Nilo Serpa, Theo Khouri, e demais colegas e professores do grupo de Astrofísica, Relatividade e Cosmologia (ARCOS) do IF-UFRJ pelo companheirismo e incentivo.

A direção e coordenação do Colégio Santo Agostinho por permitir-me ausentar de minhas obrigações letivas para participar de oficinas e reuniões científicas e aos colegas dos demais laboratórios do colégio pela tolerância com o transtorno que tais ausências inevitavelmente causaram.

Por fim, a todas as pessoas que trabalham no Observatório do Valongo, professores, funcionários e colegas, pelo ambiente acolhedor e produtivo. Aos professores e coordenadores da pós-graduação em Astronomia, pela oportunidade e apoio.

Dedicado a memória de meu avô, Armando Iribarrem.

Índice

Resumo	4
Agradecimentos	6
Introdução	13
1 Fundamentos observacionais	18
1.1 A função de luminosidade de galáxias	18
1.2 Funções de seleção	19
1.2.1 <i>Canadian Network for Observational Cosmology</i> (CNOC2)	21
1.2.2 <i>FORS Deep Field</i> (FDF)	23
2 Modelo teórico para métricas FLRW	27
2.1 Fator de escala	27
2.2 Massa estelar média	28
2.3 Contagem numérica relativística	30
2.4 Problema numérico	33
2.5 Densidade relativística por fonte	35
2.6 Distâncias observacionais	37
2.7 Densidades radiais	38
2.8 Volumes	40
3 Testes de consistência	42
3.1 Formalismo geral	42
3.2 Primeiro teste: densidade comóvel	45
3.3 Segundo teste: densidade relativística por fonte	46
3.4 Estudo da função de completeza	49
3.5 O fator E	54
3.6 Modelo empírico	55
4 Estatísticas radiais	60
Conclusões	72

A	Sistemas de magnitudes	78
B	Incerteza da contagem cumulativa	80
C	Rotinas numéricas	83
C.1	Funções de seleção	84
C.2	Runge-Kutta	86

Lista de Figuras

1	Mapa do Universo vs. Imagem do Universo	16
2.1	Grandezas relativísticas no cone de luz	30
2.2	Distâncias observacionais	38
2.3	Densidades diferenciais teóricas	41
2.4	Densidades diferenciais integrais teóricas	41
3.1	Densidade relativística por fonte para os dados do CNOC2	49
3.2	Densidade relativística por fonte e tipo espectral para os dados do CNOC2	50
3.3	Densidade relativística por fonte para os dados do FDF	50
3.4	Contagem diferencial total para os dados do CNOC2	51
3.5	Contagem diferencial por tipo espectral para os dados do CNOC2	51
3.6	Contagem diferencial total para os dados do FDF	52
3.7	Função de completeza para dados do levantamento FDF	56
3.8	Função de completeza para dados do levantamento CNOC2	57
3.9	Função de completeza por tipo espectral para dados do levantamento CNOC2	59
3.10	Comparação entre as funções de completeza calculadas	59
4.1	Densidades diferenciais no CNOC2	68
4.2	Densidades diferenciais integrais no CNOC2	68
4.3	Densidades diferenciais no FDF	69
4.4	Densidades diferenciais integrais no FDF	69
4.5	Densidades diferenciais e diferenciais integrais por d_L no CNOC2	70
4.6	Densidades diferenciais e diferenciais integrais por d_z no CNOC2	70
4.7	Densidades diferenciais e diferenciais integrais por d_L no FDF	71
4.8	Densidades diferenciais e diferenciais integrais por d_z no FDF	71
B.1	Derivada segunda da contagem cumulativa	81

Lista de Tabelas

1.1	Parâmetros evolutivos para a FL obtida do levantamento CNOC2	22
1.2	Funções de seleção para dados do CNOC2 obtidas em RS03	24
1.3	Funções de seleção para dados do CNOC2 com evolução completa	25
1.4	Parâmetros evolutivos para a FL obtida do levantamento FDF	25
1.5	Funções de seleção para dados do FDF	26
3.1	Contagem numérica diferencial para os dados do CNOC2	46
3.2	Densidade numérica comóvel no modelo padrão para os dados do FDF	47
3.3	Densidade numérica comóvel na cosmologia EdS para os dados do CNOC2	47
3.4	Ajustes do modelo empírico e fatores E	57
3.5	Função de completeza para dados do levantamento CNOC2	57
3.6	Função de completeza para dados do levantamento FDF	58
4.1	Densidades diferenciais observacionais para os dados do CNOC2	63
4.2	Densidades diferenciais integrais observacionais para os dados do CNOC2	63
4.3	Densidades diferenciais observacionais para os dados do FDF	64
4.4	Densidades diferenciais integrais observacionais para os dados do FDF	65
4.5	Distâncias observacionais na cosmologia Λ CDM	66

Introdução

O estudo de qualquer fenômeno celeste sempre foi parte fundamental da prática astronômica. Buscar modelar o comportamento de um observável qualquer no céu usando teorias de ciências básicas como a Física e a Química é uma atividade tão central na Astronomia que dificilmente precisa de justificativa adicional.

No entanto, o advento da “era da Cosmologia de precisão” criou naturalmente uma justificativa adicional para o estudo de um conjunto importante de observáveis da Astronomia extragaláctica: o uso desses observáveis na determinação do modelo cosmológico e na vinculação dos parâmetros desse modelo.

O mérito e a força desse propósito adicional em estudar observáveis como a radiação cósmica de fundo, a distribuição de supernovas, as oscilações acústicas de bárions e mesmo os surtos de raios gama são tão evidentes que é fácil passar a entendê-los como a única justificativa para se estudar tais observáveis. Pior, passar por extensão a entender tal busca pelo modelo cosmológico como única justificativa para a prática de toda a Astronomia extragaláctica.

A distribuição de galáxias no Universo a altos desvios para o vermelho, comumente expressa na Função de Luminosidade (FL) desses objetos, é um observável extragaláctico tão válido quanto os anteriores. Como tal, seu estudo invariavelmente envolve o modelo cosmológico. No entanto, a complexidade astrofísica do objeto estudado, galáxias, e a própria natureza da observação estendida no tempo passado acarreta uma série de efeitos adicionais que devem ser levados em consideração, como a taxa de formação estelar, fusões entre galáxias, a evolução desses objetos e efeitos de seleção, como o viés de Malmquist. Muitos desses efeitos ainda estão em estudo. A influência desses efeitos na contagem cumulativa de galáxias é ainda menos conhecida, tornando difícil, ao menos no atual estágio de entendimento, separar dela a influência do modelo cosmológico de modo a usar a FL para determinar tal modelo.

Tais argumentos, vistos por alguns como obstáculos para o estudo da FL, são para mim na verdade oportunidades fascinantes. Há muito a ser modelado a respeito da distribuição de galáxias no Universo. Muito a ser entendido.

O presente trabalho justifica-se portanto não na determinação do modelo cosmológico, mas no contexto geral da Astronomia: modelar fenômenos celestes usando o presente conhecimento de laboratório. Particularmente, a distribuição de galáxias e a evolução de

sua FL são fenômenos da Astrofísica Extragaláctica, que requerem o uso das ferramentas da Relatividade Geral e da Cosmologia em sua modelagem. Nesse trabalho específico, objetiva-se avançar o entendimento da conexão entre a prática astronômica da FL de galáxias e os resultados acerca da contagem de objetos da Cosmologia Relativística obtidos em Ellis (1971).

Tal conexão foi inicialmente proposta em Ribeiro & Stoeger (2003, daqui em diante RS03) e consistia em obter, a partir da FL, grandezas que pudessem ser comparadas com o que o modelo cosmológico suposto na FL previa segundo os resultados de Ellis (1971). O tratamento era completamente relativístico e geral, no sentido de ele em si não supor um modelo cosmológico. Dessa forma, pode-se aplicar os resultados ali obtidos para qualquer modelo cosmológico adotado na função de luminosidade de um catálogo que se queira utilizar. Uma das aplicações imediatas, feita naquele mesmo trabalho, é testar a consistência da FL com o modelo cosmológico suposto em sua obtenção.

Idealmente é de se esperar que um bom modelo para dado fenômeno da natureza seja capaz de produzir uma previsão acurada para a medida de uma grandeza envolvida nesse fenômeno em dadas condições conhecidas. Por previsão acurada entende-se que, dadas tais condições, a razão entre o valor previsto e o valor medido deve aproximar-se idealmente da unidade, ou em outras palavras, que o valor previsto é igual ao valor medido, dentro das incertezas do processo de observação envolvido.

Em RS03 comparava-se o comportamento de grandezas extraídas a partir da FL de galáxias com o que a teoria previa para suas observações dado determinado desvio para o vermelho. Nesse trabalho é introduzida uma nova forma de atacar o problema, através do estudo da evolução com o desvio para o vermelho da *função de completeza*. Tal função computa a cada desvio para o vermelho observado a razão entre o valor observado e o valor esperado de determinada grandeza, explicitando assim de forma mais clara o quão consistente um modelo é com as contagens de galáxias e como ele se torna mais ou menos consistente com o desvio para o vermelho. Em outras palavras, a função de completeza expressa a própria evolução com o desvio para o vermelho da consistência entre a teoria e a observação – o quão relevantes são os diversos efeitos astrofísicos envolvidos na contagem das galáxias.

É importante notar que foge completamente do escopo desse trabalho explicar a evolução da FL e/ou atacar eventuais inconsistências entre teoria e observação com modificações ou correções. O objetivo dessa parte da dissertação é meramente descritivo. Ao estudar a consistência entre esses dois aspectos da contagem de galáxias busca-se aplicar os resultados gerais obtidos em RS03 e propor uma maneira mais clara de testar eventuais modificações tanto na teoria, como modelos semi-empíricos para a densidade numérica que levem em consideração a fusão de galáxias, por exemplo, quanto na observação, como um perfil analítico diferente para a FL ou diferentes correções para a perda de contagem em altos desvios para o vermelho. Qualquer que seja a modificação proposta, os testes de

consistência aqui delineados poderão servir como guia nesse processo de refinamento do modelo teórico para a contagem e/ou das correções observacionais, permitindo comparar como tais modificações melhoram ou pioram eventuais inconsistências detectadas.

Outra aplicação dessa conexão entre teoria e observação da contagem de galáxias abordada aqui diz respeito ao debate sobre a homogeneidade do Universo. Desde o início da Cosmologia moderna, em que se usa a Relatividade Geral como teoria de gravitação para modelar o Universo, tem-se adotado o *Princípio Cosmológico* como um de seus pressupostos mais importantes. Tal princípio afirma que, em escalas grandes o suficiente, a distribuição espacial de matéria-energia do Universo se torna homogênea e isotrópica e que, portanto, as inomogeneidades na distribuição de matéria observadas em todas as áreas da Astronomia, do sistema solar a distribuição de galáxias, são fenômenos “locais”, ao menos para as escalas em que a Cosmologia se propõe a tratar.

Embora a visão de Universo em acordo com o Princípio Cosmológico seja dominante e encontre respaldo em alguns dos observáveis citados anteriormente, como a radiação cósmica de fundo, a visão hierárquica encontrou defensores ao longo de quase um século (Charlier 1908, 1922; de Vancouleurs 1970; Mandelbrot 1977, 1983; Pietronero 1987; Oldershaw 1989a,b; Ribeiro 1994).

Segundo sua versão mais recente, proposta por Mandelbrot (1977, 1983), Pietronero (1987) e Oldershaw (1989a,b), o conceito hierárquico primeiro formulado por Charlier (1908, 1922) pode ser entendido dentro de um paradigma autossimilar, em que a matéria do Universo deveria se distribuir segundo um padrão fractal, tornando-se portanto cada vez mais inomogênea à medida que se aumentassem as escalas.

A maior crítica à visão hierárquica é o fato de que o paradigma autossimilar, embora perfeitamente razoável do ponto de vista observacional, ao menos no que concerne a distribuição de galáxias em grandes escalas, ainda não possui um modelo relativístico para o Universo tão bem sucedido como o modelo Λ CDM com fase inflacionária da Cosmologia padrão.

Trazendo um novo enfoque a esse antigo debate, Ribeiro (2001) propôs que a inomogeneidade observada na distribuição de galáxias poderia ser um efeito puramente relativístico, conciliando-a assim ao princípio cosmológico e permitindo, portanto, que seja tratada dentro do arcabouço teórico dos modelos da Cosmologia padrão. A idéia chave do argumento se encontra na distinção que se deve fazer entre *homogeneidade espacial* e *homogeneidade observacional*. Segundo ele, a origem de todo o debate se encontra na confusão entre esses conceitos. O princípio cosmológico trata de uma *homogeneidade espacial*: a distribuição de matéria-energia do Universo deve ser constante em cada hipersuperfície de tempo constante, ou *mapa do Universo* (d’Inverno 1995, §22.6). No entanto, as observações das galáxias são feitas no cone de luz passado do observador, ou *imagem do Universo* (d’Inverno 1995, §22.6). Portanto, uma inomogeneidade observacional não acarreta uma inomogeneidade espacial e vice-versa, pois são definidas em substratos diferentes

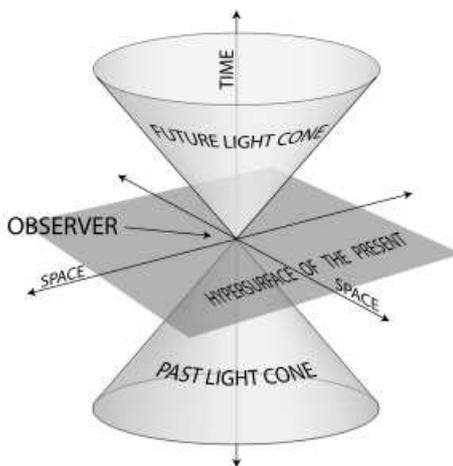


Figura 1: Um mapa do Universo é uma hipersuperfície definida por um valor de tempo cósmico (coordenada t) constante. A imagem do Universo num dado evento no tempo cósmico t é a hipersuperfície definida pelo cone de luz passado de um observador naquele evento.

da variedade. Tal diferença pode ser facilmente visualizada na figura 1. Numa interessante inversão de raciocínio, Rangel Lemos & Ribeiro (2008) mostraram que, em muitos casos, uma homogeneidade observacional implicaria numa inomogeneidade espacial.

Em Ribeiro (2005), mostrou-se a dependência com as diferentes definições observacionais de distâncias cosmológicas de quantidades estatísticas radiais que podem ser construídas a partir da FL. Em especial, foi demonstrado que a *distância por área galáctica* esconde por construção, ao menos na métrica de Einstein-de Sitter, qualquer comportamento inomogêneo dessas densidades. Em Albani *et al.* (2007, daqui em diante A07), avançamos uma maneira de remover o modelo cosmológico dos dados da FL, obtendo a contagem numérica puramente observacional e aplicamos essa técnica para estudar o comportamento observacional das densidades acima citadas.

Nesses dois trabalhos, RS03 e A07, usou-se a FL obtida por Lin *et al.* (1999, daqui em diante L99) para os dados do CNOC2. Tal FL foi ajustada supondo uma cosmologia de Einstein-de Sitter. Aqui são generalizadas as equações utilizadas em RS03 e A07 para aplicá-las a funções de luminosidade que suponham cosmologias de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) e utilizado esse tratamento para conduzir análises similares usando os dados de Gabasch *et al.* (2004, daqui em diante G04) para as observações do FORS Deep Field (FDF). Adicionalmente, os dados de L99 originalmente utilizados em RS03 e A07 são revisados, levando agora em consideração o modelo evolutivo completo proposto pelos autores do catálogo em questão.

A dissertação se divide da seguinte forma: no capítulo 1 é feita uma revisão sobre a função de luminosidade de galáxias. Discute-se ainda as funções de seleção de L99 obtidas em RS03 e obtém-se adicionalmente as funções de seleção considerando o modelo de evolução completo proposto em L99, que leva em consideração diferentes tipos espectrais,

e as funções de seleção da FL de G04, que obtém desvios para o vermelho cinco vezes mais profundos. No capítulo 2 são obtidas as equações para as grandezas de interesse para esse trabalho a partir do modelo cosmológico padrão e discute-se a abordagem numérica geral utilizada para resolvê-las. No capítulo 3 discute-se os testes de consistência dos dados de L99 e G04 com o modelo cosmológico neles assumido, seguindo o formalismo em RS03 e avança-se um novo teste de consistência. Aplica-se esse novo teste aos dados de G04 e estende-se tal análise aos dados de L99 usados originalmente em RS03 e aos obtidos utilizando o modelo de evolução completo, permitindo discutir tais análises para diferentes tipos espectrais. Além disso é feita uma comparação entre a consistência dos dados de ambos os catálogos com os modelos cosmológicos por eles adotados, e discute-se novamente a influência da morfologia galáctica nessa consistência. Propõe-se ainda um modelo empírico para a densidade numérica comóvel, baseado nos dados mais profundos de G04 ($z \approx 5$) e compara-se tal modelo com a distribuição no catálogo de L99 das galáxias classificadas espectralmente como recentes, semelhantes portanto às usadas em G04. Por fim, no capítulo 4 obtém-se densidades radiais seguindo o formalismo de A07 para as tabelas de funções de seleção de G04 e L99 e discute-se o comportamento dessas grandezas à luz do debate sobre a homogeneidade. Novamente são comparados os resultados a respeito das densidades radiais obtidas para ambos os catálogos e para as diferentes classes espectrais. De particular interesse, no apêndice C, além das principais rotinas numéricas utilizadas no trabalho, é feito um resumo de todo o processo numérico geral, explicitando passo a passo quais as equações gerais devem ser consideradas ao longo do texto.

Capítulo 1

Fundamentos observacionais

1.1 A função de luminosidade de galáxias

A função de luminosidade $\phi(L)$ é uma quantidade observável que determina o número de objetos de luminosidade L dentro de um volume V . Em 1936, baseado nas observações da época que apontavam que o desvio da relação velocidade-magnitude aparente era pequeno no estudo de galáxias de Humason (1936), Hubble (1936a,b) propôs que a FL podia ser ajustada analiticamente por uma distribuição gaussiana com parâmetro de dispersão $\sigma = 0.85$ e valor médio $\bar{M} = -15.18$. Esse ajuste foi mais tarde questionado por Zwicky (1957), que propunha um ajuste exponencial da forma $k(10^{0.2M})$, onde k é uma constante de normalização e M é a magnitude absoluta. Kiang (1961) foi provavelmente o primeiro a argumentar que a discrepância entre os ajustes de Hubble e Zwicky advinham de efeitos de seleção na amostra de Hubble (1936b) que diminuía a contagem das galáxias de luminosidade mais baixa. Propõe então uma lei de potência da forma $k(M - M_0)^3$ para a porção mais luminosa de sua amostra de aproximadamente 600 galáxias de campo ($M < -19$) e uma exponencial, de acordo com Zwicky, para a porção menos luminosa da amostra ($M > -19.5$).

Abell (1965) propôs então uma divisão do ajuste entre galáxias muito e pouco brilhantes, segundo sua magnitude aparente m em relação à magnitude característica m_* em que se observava uma mudança na inclinação da contagem logarítmica de galáxias em função da magnitude aparente, $\log N(m)$, ajustando assim duas exponenciais, uma para as galáxias muito brilhantes ($m < m_*$) e outra para galáxias pouco brilhantes ($m > m_*$). Arakelyan & Kalloglyan (1970) chegaram a propor um ajuste de três inclinações distintas para $\log N(m)$.

Hoje em dia essa disputa está resolvida. Ambos os ajustes de Hubble e Zwicky se aplicam bem para os diferentes tipos morfológicos trabalhados por cada um. O ajuste gaussiano de Hubble aplica-se bem a galáxias com alto brilho superficial (espirais) enquanto o ajuste exponencial de Zwicky aplica-se bem a galáxias com baixo brilho superficial (anãs

irregulares e anãs espirais).

Schechter (1976) propôs um ajuste analítico que combina uma forma exponencial a uma lei de potência e tem como base um modelo estocástico autossimilar para a formação de galáxias (Press & Schechter, 1974). Embora a idéia de uma função de luminosidade geral para todos os tipos morfológicos de galáxias, proposto em Schechter (1976), não tenha vingado, o ajuste analítico ali colocado tornou-se padrão amplamente utilizado no estudo corrente da FL de galáxias, escrevendo-se

$$\phi(L) dL = \phi^* \left(\frac{L}{L^*}\right)^\alpha e^{L/L^*} d\left(\frac{L}{L^*}\right), \quad (1.1)$$

sendo L_* o parâmetro que determina uma *luminosidade característica* correspondente a uma mudança na inclinação de $\log N(m)$, α a inclinação assintótica da função na região de baixa luminosidade e ϕ^* um fator de normalização. Partindo da relação entre a luminosidade L e a magnitude absoluta M ,

$$M = -2.5 \log L, \quad (1.2)$$

pode-se reescrever o perfil de Schechter na equação 1.1 em magnitude absoluta,

$$\phi(M) dM = \phi^* 10^{0.4[1+\alpha(M^*-M)]} e^{-10^{0.4(M^*-M)}} dM \quad (1.3)$$

onde o parâmetro M^* é a *magnitude absoluta característica* correspondente a L^* .

1.2 Funções de seleção

Seguindo a definição usada em Peebles (1980), escreve-se a *função de seleção* ψ em termos de $\phi(L)$ como,

$$\psi = \int_{L_{lim}}^{\infty} \phi(L) dL, \quad (1.4)$$

onde L_{lim} é o limite em luminosidade da observação. Como está definida a função de seleção é então a densidade numérica de galáxias com luminosidade acima de L_{lim} , definida no mesmo volume da função de luminosidade $\phi(L)$ correspondente. Tal integral pode ser resolvida se algum perfil analítico for ajustado à função de luminosidade $\phi(L)$ observada. Como discutido anteriormente, o perfil mais amplamente utilizado é o de Schechter. Lin *et al.* (1999), Fried *et al.* (2001), Blanton *et al.* (2003), Pozzetti *et al.* (2003), Bell *et al.* (2003), Norman *et al.* (2004), Wilmer *et al.* (2006), Ly *et al.* (2007) e Tzanavaris & Georgantopoulos (2008) obtiveram parâmetros de Schechter para galáxias em desvios para vermelho até $z \sim 1.5$. Poli *et al.* (2003) e Rudnick *et al.* (2003) fizeram o mesmo para galáxias em desvios para o vermelho até $z \sim 3$. Mais recentemente, Bouwens *et al.* (2007) e Gabasch *et al.* (2008) obtiveram esses parâmetros para galáxias em desvios para

o vermelho até $z \sim 6$. Em todos esses catálogos foi constatado que a FL evolui com o desvio para vermelho.

Em geral um catálogo de desvios para o vermelho de galáxias é publicado usando filtros em diferentes bandas e pode ter levado em consideração algum tipo de classificação espectral dos objetos. Portanto, a *função de seleção específica*, $\psi_{W,v}(z)$, referente à contagem de galáxias de determinada classe espectral v num dado filtro W é dada por

$$\psi_{W,v}(z) = \int_{l_{lim}^{W,v}}^{\infty} \phi_{W,v}(l, z) dl, \quad (1.5)$$

onde $\phi_{W,v}(l, z)$ é a função de luminosidade para as galáxias de mesmos índices v e W e $l_{lim}^{W,v}$ a razão entre a luminosidade da galáxia menos brilhante detectada no filtro W e a luminosidade característica L_*^v . Expressando a função de luminosidade em termos de seus parâmetros em magnitude absoluta, $\phi_{W,v}^*(z)$, $M_{W,v}^*(z)$ e $\alpha_{W,v}(z)$, como na equação 1.3, a expressão acima fica

$$\psi_{W,v}(z) = 0.4 \ln 10 \int_{-\infty}^{M_{lim}^{W,v}(z)} \phi_{W,v}^*(z) 10^{0.4[1+\alpha_{W,v}(z)[M_{W,v}^*(z)-\bar{M}]} \exp\{-10^{0.4[M_{W,v}^*(z)-\bar{M}]}\} d\bar{M}, \quad (1.6)$$

A função de seleção é escrita em termos das funções de seleção específicas segundo

$$\psi(z) = \sum_W a_W \frac{\sum_v P_v \mathcal{M}_v \psi_{W,v}(z)}{\sum_v P_v \mathcal{M}_v}, \quad (1.7)$$

pois, de maneira geral, devemos levar em consideração as diferentes massas estelares típicas \mathcal{M}_v , como será discutido detalhadamente na §2.2. As constantes a_W são introduzidas para evitar contagem múltipla das mesmas galáxias em diferentes filtros:

$$a_W(z) = 1, \quad \text{para } W = 1, \quad (1.8)$$

e

$$a_W(z) < 1, \quad \text{para } W > 1. \quad (1.9)$$

Para o presente trabalho foram calculadas as funções de seleção específicas usando os parâmetros de Schechter apresentados em G04 para o levantamento FDF, o que permitiu estender a discussão iniciada em RS03 e A07 a desvios para o vermelho cinco vezes mais profundos. Os resultados foram comparados com as funções de seleção específicas obtidas em RS03 e A07 para o conjunto de dados de L99 usando o levantamento CNOC2. Adicionalmente, obteve-se as funções de seleção para esse mesmo catálogo levando em consideração o modelo completo de evolução, como será discutido na seção seguinte, o que permitiu estender a discussão original para diferentes tipos espectrais de galáxias. Ambos os catálogos, apresentados em G04 e L99, utilizam o sistema de magnitudes AB, o que pode ser relevante saber para determinar os limites em magnitude absoluta das amostras,

em geral informados em magnitude aparente (vide apêndice A). A seguir, detalha-se o cálculo das funções de seleção para esses dois catálogos.

1.2.1 *Canadian Network for Observational Cosmology (CNOC2)*

Em L99 os autores usaram o perfil de Schechter para ajustar os dados de um conjunto de mais de 2000 galáxias observadas pelo levantamento CNOC2 no intervalo em desvio para o vermelho $0.12 < z < 0.55$. O número de objetos e a profundidade da amostra, cuja parametrização os autores afirmam ser válida até $z \approx 1$, foram as principais razões citadas em RS03 para a escolha do catálogo na demonstração de testes de consistência como aplicação da conexão com a teoria das contagens ali delineada. As galáxias do catálogo de L99 foram selecionadas na banda R_C da amostra espectroscópica do levantamento, adotando $R_C = 21.5$ como limite nominal de completeza em magnitude aparente. Seus desvios para o vermelho foram obtidos por fotometria em três diferentes bandas, R_C de Kron-Cousins, B de Johnson e U , o que permitiu aos autores dividi-las em três classes morfológicas v , anteriores (“early-type”, $v = 1$), intermediárias ($v = 2$) e posteriores (“late-type”, $v = 3$), segundo o tipo de espectro de distribuição de energia que melhor se ajustou às cores obtidas para cada objeto. Tal classificação espectral motivou nesse trabalho a extensão do estudo desse catálogo para levar em conta o modelo de evolução completo proposto em L99, como será melhor discutido no capítulo 3. Na derivação das distâncias e volumes envolvidos, os autores supuseram um modelo cosmológico de Einstein-de Sitter com constante de Hubble $H_0 = 100 \text{ km Mpc}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

Para ajustar a evolução da FL com o desvio para o vermelho, Ribeiro e Stoeger (2003) inicialmente utilizaram a parametrização da magnitude característica proposta em L99:

$$M_{W,v}^*(z) = M'_{W,v} - Q_{W,v}(z - 0.3), \quad (1.10)$$

onde $M'_{W,v}$ e $Q_{W,v}$ são parâmetros de evolução ajustados às contagens, dados na tabela 1.1. De posse desses dados e dos parâmetros ϕ_0^* dados na mesma tabela, pode-se escrever a equação para as funções de seleção específicas $\psi_{W,v}$ desse catálogo, a partir da equação geral (1.6),

$$\psi_{W,v}(z) = 0.4 \ln 10 \int_{-\infty}^{M_{lim}^W} \phi_0^* 10^{0.4[1 + \alpha_{W,v}(M'_{W,v} - Q_{W,v}(z - 0.3) - \bar{M})]} \times \exp\{-10^{0.4[M'_{W,v} - Q_{W,v}(z - 0.3) - \bar{M}]}\} d\bar{M}, \quad (1.11)$$

onde os limites em magnitudes absolutas das bandas do levantamento eram $-23.0 < M_{R_C} < -17.0$, $-22.0 < M_U < -16.0$ e $-22.0 < M_B < -16.0$ (Lin *et al.* 1999). Tais equações foram resolvidas por meio de simples quadraturas para alguns valores de desvio para o vermelho dentro do intervalo $0 < z < 1.0$ em que os autores de L99 afirmam

Tabela 1.1: Parâmetros evolutivos para a FL obtida do levantamento CNOC2 publicados por Lin *et al.* (1999)

v	M'	α	ϕ_0^*	$\mathcal{P}_{W,v}$	$Q_{W,v}$
banda B					
1	-19.06 ± 0.12	-0.08 ± 0.14	0.0203 ± 0.0036	-1.07 ± 0.49	1.58 ± 0.49
2	-19.38 ± 0.16	-0.53 ± 0.15	0.0090 ± 0.0023	0.73 ± 0.70	0.90 ± 0.72
3	-19.26 ± 0.16	-1.23 ± 0.12	0.0072 ± 0.0033	3.08 ± 0.99	0.18 ± 0.71
banda R_C					
1	-20.50 ± 0.12	-0.07 ± 0.14	0.0185 ± 0.0037	-0.88 ± 0.52	1.24 ± 0.53
2	-20.47 ± 0.17	-0.61 ± 0.15	0.0080 ± 0.0023	0.89 ± 0.74	0.69 ± 0.76
3	-20.11 ± 0.18	-1.34 ± 0.12	0.0056 ± 0.0030	3.17 ± 1.03	0.11 ± 0.74
banda U					
1	-18.54 ± 0.11	-0.14 ± 0.15	0.0213 ± 0.0036	-1.19 ± 0.48	1.85 ± 0.48
2	-19.27 ± 0.16	-0.51 ± 0.15	0.0092 ± 0.0026	0.68 ± 0.69	0.97 ± 0.70
3	-19.32 ± 0.15	-1.14 ± 0.13	0.0095 ± 0.0039	2.67 ± 0.97	0.51 ± 0.66

ser válidas suas parametrizações. Os resultados para as funções de seleção específicas são dados na tabela 1.2. As proporções entre os diferentes tipos morfológicos P_v são $P_1 = 0.29$, $P_2 = 0.24$ e $P_3 = 0.47$ (RS03). Como não houve contagens repetidas nos três filtros, as constantes a_W da equação (1.9) valem todas $1/3$. Com esses dados e as funções de seleção específicas $\psi_{W,v}$ em cada desvio para o vermelho z considerado na tabela 1.2, pode-se obter a função de seleção ψ nesses mesmos desvios para o vermelho, através da equação (1.7).

Para levar em consideração na totalidade o efeito do tipo morfológico nas funções de seleção é preciso utilizar por completo o modelo de evolução da FL proposto em L99. Esse modelo contempla além do parâmetro Q , responsável pela variação com o desvio para o vermelho do parâmetro de Schechter M^* como dado na equação (1.10), um parâmetro P , responsável pela variação da própria função de seleção como segue:

$$\psi_{W,v}(z) = \psi_{W,v}(0) 10^{0.4Pz}, \quad (1.12)$$

onde o parâmetro de densidade numérica local $\psi_{W,v}(0)$ está relacionado ao parâmetro de Schechter ϕ_0^* dado na tabela 1.1 por

$$\begin{aligned} \psi_{W,v}(0) = 0.4 \ln 10 \int_{-\infty}^{M_{lim}^W} \phi_0^* 10^{0.4[1+\alpha_{W,v}[M'_{W,v}+0.3Q_{W,v}-\bar{M}]} \times \\ \times \exp\{-10^{0.4[M'_{W,v}+0.3Q_{W,v}-\bar{M}]}\} d\bar{M}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Os resultados para as funções de seleção específicas $\psi_{w,v}$ levando em consideração o modelo completo de evolução da FL são dados na tabela 1.3. Com esses dados pode-se obter a função de seleção ψ de forma completamente análoga ao que foi discutido anteriormente e as funções de seleção ψ_v para cada tipo espectral trivialmente:

$$\psi_v = \sum_w b_w \psi_{w,v} = \frac{1}{3} \sum_w \psi_{w,v} \quad (1.14)$$

1.2.2 *FORS Deep Field (FDF)*

Em G04 foram ajustados parâmetros de Schechter a um conjunto de 5558 galáxias selecionadas a partir do catálogo FORS Deep Field e medidas por fotometria até o limite de 26.8 em magnitude aparente na banda I no sistema AB. O intervalo em desvio para o vermelho $0.5 \leq z \leq 5.0$, cinco vezes mais profundo que o do catálogo estudado anteriormente, é a princípio mais interessante para checar possíveis inomogeneidades observacionais, como será discutido no capítulo 4. Além disso, os autores supuseram na determinação de sua FL o chamado modelo cosmológico de concordância ou modelo padrão, com métrica FLRW e parâmetros $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$ e constante de Hubble igual a $H_0 = 70 \text{ km Mpc}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Em contrapartida, o catálogo possui apenas galáxias azuis, não permitindo discutir o efeito da morfologia das galáxias na evolução com o desvio para o vermelho de suas contagens. Os autores do catálogo ajustaram essa evolução assumindo que os parâmetros de Schechter utilizados variassem segundo as equações:

$$\phi_w^*(z) = \phi_0^*(1+z)^{B_w}, \quad (1.15)$$

$$M_w^*(z) = M_0^* + A_w \ln(1+z), \quad (1.16)$$

$$\alpha_w(z) = \alpha_0, \quad (1.17)$$

onde A_w e B_w são os parâmetros de evolução ajustados em G04 para os diferentes filtros W e M_0^* , ϕ_0^* and α_0 são os parâmetros do perfil de Schechter na vizinhança Galáctica ($z=0$). Para evitar sobrecarregar a notação, o índice W foi suprimido dos últimos três parâmetros. Os valores melhor ajustados para os parâmetros desse modelo de evolução são dados na tabela 1.4.

A equação para as funções de seleção específicas para esse catálogo fica então,

$$\begin{aligned} \psi^W(z) = 0.4 \ln 10 \phi_0^*(1+z)^{B_w} \int_{-28.77}^{-10.77} 10^{0.4(1+\alpha_0)[M_0^*+A_w \ln(1+z)-\bar{M}_w]} \times \\ \times \exp\{-10^{0.4[M_0^*+A_w \ln(1+z)-\bar{M}_w]}\} d\bar{M}_w, \end{aligned} \quad (1.18)$$

onde os limites em magnitude absoluta do catálogo foram obtidos por comunicação privada com os autores. As funções de seleção específicas foram integradas numericamente para os cinco diferentes filtros do catálogo — 1500 Å, 2800 Å, u' , g' , B — em valores igualmente

Tabela 1.2: Funções de seleção para a FL obtida do levantamento CNOC2 em RS03

z	ψ_1^B (Mpc $^{-3}$)	ψ_2^B (Mpc $^{-3}$)	ψ_3^B (Mpc $^{-3}$)
0.05	0.0182 \pm 0.0033	0.0122 \pm 0.0036	0.0252 \pm 0.0130
0.12	0.0183 \pm 0.0033	0.0123 \pm 0.0036	0.0254 \pm 0.0130
0.25	0.0185 \pm 0.0034	0.0125 \pm 0.0037	0.0257 \pm 0.0131
0.40	0.0187 \pm 0.0034	0.0128 \pm 0.0038	0.0260 \pm 0.0133
0.55	0.0189 \pm 0.0035	0.0130 \pm 0.0040	0.0264 \pm 0.0136
0.75	0.0190 \pm 0.0035	0.0133 \pm 0.0041	0.0268 \pm 0.0143
0.90	0.0191 \pm 0.0035	0.0135 \pm 0.0042	0.0272 \pm 0.0150
1.00	0.0191 \pm 0.0035	0.0136 \pm 0.0043	0.0274 \pm 0.0155
z	ψ_1^{Rc} (Mpc $^{-3}$)	ψ_2^{Rc} (Mpc $^{-3}$)	ψ_3^{Rc} (Mpc $^{-3}$)
0.05	0.0181 \pm 0.0038	0.0120 \pm 0.0040	0.0220 \pm 0.0130
0.12	0.0182 \pm 0.0038	0.0121 \pm 0.0041	0.0221 \pm 0.0130
0.25	0.0183 \pm 0.0039	0.0123 \pm 0.0041	0.0223 \pm 0.0130
0.40	0.0185 \pm 0.0039	0.0125 \pm 0.0042	0.0225 \pm 0.0132
0.55	0.0186 \pm 0.0040	0.0127 \pm 0.0044	0.0227 \pm 0.0135
0.75	0.0187 \pm 0.0040	0.0130 \pm 0.0045	0.0230 \pm 0.0141
0.90	0.0187 \pm 0.0041	0.0132 \pm 0.0046	0.0232 \pm 0.0148
1.00	0.0187 \pm 0.0041	0.0133 \pm 0.0047	0.0234 \pm 0.0153
z	ψ_1^U (Mpc $^{-3}$)	ψ_2^U (Mpc $^{-3}$)	ψ_3^U (Mpc $^{-3}$)
0.05	0.0180 \pm 0.0031	0.0119 \pm 0.0038	0.0284 \pm 0.0134
0.12	0.0182 \pm 0.0031	0.0121 \pm 0.0038	0.0289 \pm 0.0135
0.25	0.0186 \pm 0.0032	0.0123 \pm 0.0039	0.0297 \pm 0.0139
0.40	0.0189 \pm 0.0033	0.0126 \pm 0.0040	0.0307 \pm 0.0145
0.55	0.0192 \pm 0.0033	0.0128 \pm 0.0042	0.0317 \pm 0.0152
0.75	0.0194 \pm 0.0034	0.0131 \pm 0.0043	0.0330 \pm 0.0162
0.90	0.0195 \pm 0.0034	0.0134 \pm 0.0045	0.0341 \pm 0.0172
1.00	0.0196 \pm 0.0034	0.0135 \pm 0.0045	0.0348 \pm 0.0179

espaçados varrendo todo o intervalo em desvios para o vermelho do catálogo. Como todas as galáxias foram contadas em todos os filtros, deve-se fazer $b_W = 1/5$, com os índices dos filtros W correspondendo a 1500 Å, 2800 Å, u' , g' , B . Usando as constantes acima e as funções de seleção específicas $\psi_{W,v}$ nos desvios para o vermelho dados na tabela 1.5 pode-se obter a função de seleção ψ nesses mesmos desvios para o vermelho, referente aos dados de G04, novamente pela equação (1.7). Os erros foram propagados quadraticamente. Os resultados estão resumidos na tabela 1.5.

Tabela 1.3: Funções de seleção para a FL obtida do levantamento CNOC2 usando o modelo completo de evolução proposto em L99

z	ψ_1^B (Mpc $^{-3}$)	ψ_2^B (Mpc $^{-3}$)	ψ_3^B (Mpc $^{-3}$)
0.05	0.01526 \pm 0.00001	0.00994 \pm 0.00001	0.01648 \pm 0.00003
0.12	0.01425 \pm 0.00003	0.01042 \pm 0.00004	0.02010 \pm 0.00010
0.25	0.01253 \pm 0.00006	0.01137 \pm 0.00008	0.02906 \pm 0.00029
0.40	0.01081 \pm 0.00008	0.01258 \pm 0.00014	0.04447 \pm 0.00070
0.55	0.00933 \pm 0.00010	0.01392 \pm 0.00021	0.06806 \pm 0.00148
0.75	0.00766 \pm 0.00011	0.01592 \pm 0.00033	0.12003 \pm 0.00356
0.90	0.00660 \pm 0.00012	0.01761 \pm 0.00044	0.18369 \pm 0.00655
1.00	0.00598 \pm 0.00012	0.01883 \pm 0.00053	0.24395 \pm 0.00966
z	ψ_1^{Rc} (Mpc $^{-3}$)	ψ_2^{Rc} (Mpc $^{-3}$)	ψ_3^{Rc} (Mpc $^{-3}$)
0.05	0.01797 \pm 0.00002	0.01436 \pm 0.00002	0.04311 \pm 0.00008
0.12	0.01698 \pm 0.00004	0.01521 \pm 0.00005	0.05288 \pm 0.00026
0.25	0.01528 \pm 0.00007	0.01692 \pm 0.00013	0.07729 \pm 0.00080
0.40	0.01353 \pm 0.00011	0.01913 \pm 0.00023	0.11977 \pm 0.00197
0.55	0.01198 \pm 0.00014	0.02163 \pm 0.00035	0.18558 \pm 0.00421
0.75	0.01019 \pm 0.00016	0.02549 \pm 0.00057	0.33276 \pm 0.01028
0.90	0.00902 \pm 0.00017	0.02882 \pm 0.00077	0.51562 \pm 0.01912
1.00	0.00832 \pm 0.00017	0.03128 \pm 0.00093	0.69045 \pm 0.02845
z	ψ_1^U (Mpc $^{-3}$)	ψ_2^U (Mpc $^{-3}$)	ψ_3^U (Mpc $^{-3}$)
0.05	0.01686 \pm 0.00002	0.01222 \pm 0.00002	0.03179 \pm 0.00005
0.12	0.01561 \pm 0.00004	0.01277 \pm 0.00004	0.03777 \pm 0.00017
0.25	0.01354 \pm 0.00006	0.01385 \pm 0.00010	0.05199 \pm 0.00048
0.40	0.01149 \pm 0.00009	0.01521 \pm 0.00017	0.07519 \pm 0.00110
0.55	0.00975 \pm 0.00010	0.01671 \pm 0.00025	0.10873 \pm 0.00220
0.75	0.00783 \pm 0.00011	0.01894 \pm 0.00039	0.17780 \pm 0.00491
0.90	0.00664 \pm 0.00011	0.02081 \pm 0.00052	0.25712 \pm 0.00852
1.00	0.00595 \pm 0.00011	0.02215 \pm 0.00061	0.32880 \pm 0.01210

Tabela 1.4: Parâmetros evolutivos para a FL obtida do levantamento FDF

banda	A_w	B_w	M_0^* (mag)	ϕ_0^* (10^{-2} Mpc $^{-3}$)	α_0
1500 Å	-2.19	-1.76	-17.40	-2.71	-1.01
2800 Å	-2.05	-1.74	-18.16	-2.46	-1.06
u'	-1.80	-1.70	-18.95	-2.19	-1.10
g'	-1.08	-1.29	-21.00	-0.83	-1.26
B	-1.03	-1.27	-20.92	-0.82	-1.24

Tabela 1.5: Funções de seleção para a FL obtida do levantamento FDF

z	ψ^{1500}		ψ^{2800}		$\psi^{u'}$		$\psi^{g'}$		ψ^B	
	(Mpc $^{-3}$)		(Mpc $^{-3}$)		(Mpc $^{-3}$)		(Mpc $^{-3}$)		(Mpc $^{-3}$)	
0.50	0.1097	+0.0269 -0.0244	0.1134	+0.0279 -0.0274	0.1147	+0.0300 -0.0273	0.2054	+0.0609 -0.0565	0.1993	+0.0571 -0.0541
0.75	0.0888	+0.0228 -0.0209	0.0914	+0.0235 -0.0232	0.0922	+0.0250 -0.0230	0.1757	+0.0542 -0.0506	0.1707	+0.0506 -0.0487
1.00	0.0738	+0.0198 -0.0183	0.0757	+0.0204 -0.0202	0.0762	+0.0214 -0.0199	0.1535	+0.0492 -0.0461	0.1493	+0.0458 -0.0447
1.25	0.0626	+0.0175 -0.0162	0.0640	+0.0179 -0.0179	0.0643	+0.0187 -0.0176	0.1362	+0.0454 -0.0427	0.1326	+0.0420 -0.0415
1.50	0.0540	+0.0157 -0.0146	0.0551	+0.0160 -0.0160	0.0552	+0.0166 -0.0157	0.1224	+0.0422 -0.0399	0.1192	+0.0389 -0.0389
1.75	0.0472	+0.0142 -0.0133	0.0481	+0.0145 -0.0145	0.0482	+0.0149 -0.0142	0.1111	+0.0396 -0.0375	0.1083	+0.0364 -0.0367
2.00	0.0417	+0.0129 -0.0122	0.0424	+0.0132 -0.0133	0.0425	+0.0135 -0.0129	0.1017	+0.0373 -0.0355	0.0992	+0.0342 -0.0348
2.25	0.0372	+0.0119 -0.0112	0.0378	+0.0121 -0.0122	0.0379	+0.0123 -0.0118	0.0937	+0.0354 -0.0337	0.0915	+0.0324 -0.0332
2.50	0.0335	+0.0110 -0.0104	0.0340	+0.0112 -0.0113	0.0340	+0.0113 -0.0109	0.0869	+0.0337 -0.0322	0.0849	+0.0307 -0.0318
2.75	0.0303	+0.0102 -0.0097	0.0307	+0.0103 -0.0105	0.0308	+0.0105 -0.0101	0.0810	+0.0322 -0.0308	0.0792	+0.0293 -0.0305
3.00	0.0277	+0.0095 -0.0090	0.0280	+0.0096 -0.0098	0.0280	+0.0097 -0.0094	0.0758	+0.0308 -0.0295	0.0742	+0.0280 -0.0293
3.25	0.0253	+0.0089 -0.0085	0.0256	+0.0090 -0.0092	0.0256	+0.0091 -0.0088	0.0713	+0.0296 -0.0284	0.0698	+0.0269 -0.0282
3.50	0.0233	+0.0083 -0.0080	0.0236	+0.0085 -0.0086	0.0236	+0.0085 -0.0083	0.0673	+0.0285 -0.0274	0.0659	+0.0258 -0.0272
3.75	0.0216	+0.0079 -0.0075	0.0218	+0.0080 -0.0081	0.0218	+0.0080 -0.0078	0.0637	+0.0275 -0.0264	0.0624	+0.0249 -0.0263
4.00	0.0200	+0.0074 -0.0071	0.0202	+0.0075 -0.0077	0.0202	+0.0075 -0.0074	0.0604	+0.0266 -0.0256	0.0592	+0.0240 -0.0255
4.25	0.0187	+0.0070 -0.0068	0.0188	+0.0071 -0.0073	0.0188	+0.0071 -0.0070	0.0575	+0.0257 -0.0248	0.0564	+0.0232 -0.0247
4.50	0.0174	+0.0067 -0.0064	0.0176	+0.0068 -0.0069	0.0176	+0.0067 -0.0066	0.0548	+0.0249 -0.0240	0.0538	+0.0225 -0.0240
4.75	0.0163	+0.0064 -0.0061	0.0165	+0.0064 -0.0066	0.0165	+0.0064 -0.0063	0.0524	+0.0242 -0.0233	0.0514	+0.0218 -0.0233
5.00	0.0154	+0.0061 -0.0059	0.0155	+0.0061 -0.0063	0.0155	+0.0061 -0.0060	0.0502	+0.0235 -0.0227	0.0492	+0.0211 -0.0227

Capítulo 2

Modelo teórico para métricas FLRW

Nesse capítulo são tratadas todas as grandezas de interesse do trabalho e obtidas as equações usadas para calculá-las em cosmologias de métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Partindo dessa classe de modelos cosmológicos serão obtidas, primeiro, as equações que compõe o problema numérico. Em seguida, de posse das respectivas respostas numéricas, são escritas as equações para as demais grandezas utilizadas nos testes de consistência e no estudo do comportamento das estatísticas radiais.

2.1 Fator de escala

A métrica FLRW pode ser escrita como segue:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.1)$$

onde $a(t)$ é uma função chamada *fator de escala cósmico* que depende do *tempo cósmico* t , uma coordenada tipo tempo numa foliação $\{3+1\}$ da variedade, k , o *parâmetro de curvatura* e c , a velocidade da luz no vácuo. Como é bem conhecido (*e.g.* Roos 1994, §3.2) a solução das equações de campo de Einstein com constante cosmológica tomando essa métrica e supondo, segundo o postulado de Weyl, um tensor momento energia de fluido perfeito levam à *equação de Friedmann*:

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho_m}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (2.2)$$

onde ρ_m é a *densidade de matéria* e é adotada a definição usual para a *função de Hubble* em termos do fator de escala:

$$H(t) \equiv \frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt}. \quad (2.3)$$

Uma *densidade de energia cosmológica* pode ser definida em termos da constante cosmológica:

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (2.4)$$

Lembrando que a *densidade crítica* relacionada a um universo espacialmente plano ($k=0$) é dada por:

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (2.5)$$

onde H_0 é a *constante de Hubble*, as seguintes relações para os *parâmetros de densidade* relativos à densidade crítica valem

$$\Omega_0 \equiv \Omega_{m_0} + \Omega_{\Lambda_0} = \frac{\rho_0}{\rho_c} = \frac{\rho_{m_0}}{\rho_c} + \frac{\rho_{\Lambda_0}}{\rho_c}. \quad (2.6)$$

O índice zero foi utilizado para indicar quantidades observáveis na hipersuperfície de tempo constante $t = 0$. Como Λ é constante, então $\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda_0}$. Considerando as definições (2.6), pode-se reescrever a equação de Friedmann (2.2) no tempo presente como

$$kc^2 = H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1). \quad (2.7)$$

Além disso, a partir do princípio da conservação de energia aplicado à era dominada pela matéria, com pressão zero, pode-se mostrar que (vide Roos 1994, p. 21)

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} = \Omega_{m_0} \frac{a_0^3}{a^3}. \quad (2.8)$$

Essa última expressão junto com a equação (2.7) permite que se reescreva a equação (2.2) como uma equação diferencial ordinária de primeira ordem em termos do fator de escala $a(t)$:

$$\frac{da}{dt} = H_0 \left[\frac{\Omega_{m_0} a_0^3}{a} + \Omega_{\Lambda_0} a^2 - (\Omega_0 - 1) a_0^2 \right]^{1/2}. \quad (2.9)$$

Os dois modelos cosmológicos específicos utilizados aqui são o de Einstein-de Sitter, cujo parâmetro de densidade de massa relativa à crítica Ω_{m_0} vale um e o parâmetro de densidade de energia cosmológica relativa à crítica Ω_Λ vale zero, e o chamado modelo de concordância, cujos parâmetros valem aproximadamente $\Omega_{m_0} = 0.3$ e $\Omega_\Lambda = 0.7$.

2.2 Massa estelar média

Para estabelecer uma conexão entre o número observado de galáxias, obtido através da função de luminosidade e o modelo cosmológico adotado nas observações é preciso uma teoria relativística para a contagem numérica das fontes. Em outras palavras, é preciso obter uma *densidade numérica* n a partir da densidade de matéria ρ_m . Em geral, pode-se

escrever

$$n = \frac{\rho_m}{\mathcal{M}_g} = \frac{N}{V}. \quad (2.10)$$

N é o número de objetos num determinado volume V e \mathcal{M}_g é a *massa estelar média*. Aqui faz-se necessário um aprofundamento da discussão. Por um lado sabe-se que diversos efeitos astrofísicos influenciam a medida da massa de uma galáxia: fusões podem fazê-las ganhar massa, assim como um surto de formação estelar pode aumentar sua luminosidade e com isso sua massa estimada através da relação massa-luminosidade. Além disso, segundo dados de Elmegreen (1998) e Sparke & Gallagher (2000), galáxias de diferentes tipos morfológicos podem ter massas que variam de 10^9 a $10^{12}\mathcal{M}_\odot$, o que implica que a evolução com o desvio para o vermelho das proporções entre os diferentes tipos morfológicos das galáxias também deve ser considerada, isso é,

$$\mathcal{M}_g(z) = \sum_v P_v(z) \mathcal{M}_v(z), \quad (2.11)$$

onde $P_v(z)$ é a proporção de galáxias do tipo morfológico v em relação ao total em dada época de desvio para o vermelho z e $\mathcal{M}_v(z)$ a típica massa de repouso de galáxias daquele tipo. A primeira quantidade pode depender do desvio para o vermelho por conta da evolução das populações e das fusões, enquanto a segunda pode também variar com o desvio para o vermelho por conta das fusões e de formação estelar. Por outro lado é preciso lembrar o contexto cosmológico em que se insere a discussão: os catálogos atuais de desvios para o vermelho de galáxias possuem milhares de objetos distribuídos em volumes da ordem de 10^4 Mpc. Nessas escalas seria, portanto, razoável ignorar os detalhes morfológicos das fontes e supor uma massa estelar média.

Mais ainda, por se tratar de uma média, se porventura as observações levassem à conclusão de que \mathcal{M}_g varia com o desvio para o vermelho, tal conclusão indicaria que os processos astrofísicos discutidos anteriormente são estatisticamente relevantes na escala cosmológica: embora locais, seus efeitos se somam de forma coerente o suficiente para serem observados nessa escala.

Nesse trabalho parte-se, então, da suposição *a priori* de que a massa estelar média não varia com o desvio para o vermelho, isso é, que os processos astrofísicos que influenciam a estimativa da massa de uma galáxia não são estatisticamente relevantes na escala cosmológica. Essa suposição será novamente examinada no contexto dos testes de consistência do capítulo 3. Por enquanto serão usadas estimativas baseadas nos dados de Sparke & Gallagher (2000): $\mathcal{M}_g \approx 10^{11}\mathcal{M}_\odot$ para as galáxias azuis de G04 e $\mathcal{M}_1 = 0.5 \times 10^{11}\mathcal{M}_\odot$, $\mathcal{M}_2 = 0.3 \times 10^{11}\mathcal{M}_\odot$ e $\mathcal{M}_3 = 0.1 \times 10^{11}\mathcal{M}_\odot$, para os três diferentes tipos morfológicos considerados em L99. Usando as equações (2.6) e (2.8) pode-se então

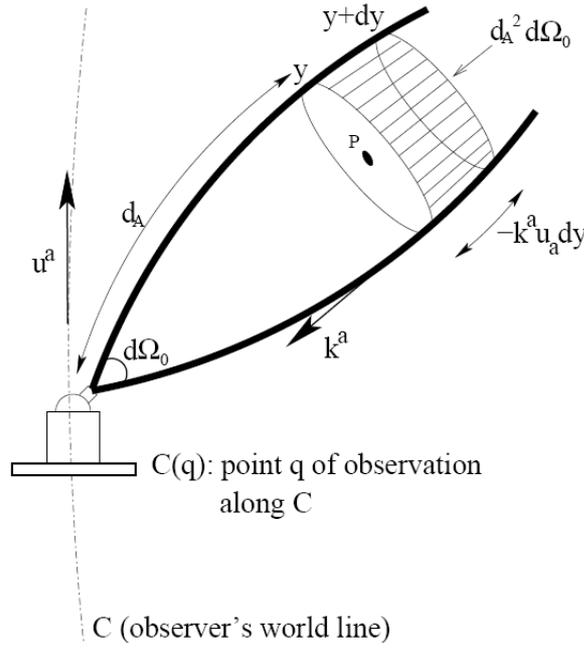


Figura 2.1: Figura em RS03 ilustrando as grandezas relativísticas no cone de luz: u^a é a 4-velocidade do observador no ponto q, tangente a sua trajetória C; k^a é o vetor tangente da geodésica nula, dy é um deslocamento no parâmetro afim da geodésica nula, d_A a distância por área e $d\Omega_0$ ($d\omega_0$ no presente texto) é o ângulo sólido correspondente à galáxia no ponto P.

reescrever a equação (2.10) como

$$n = \left(\frac{3\Omega_{m_0} H_0^2 a_0^3}{8\pi G M_g} \right) \frac{1}{a^3}. \quad (2.12)$$

2.3 Contagem numérica relativística

Considerando o grupo de geodésicas nulas que definem o cone de luz do observador em $t = 0$ subentendendo um ângulo sólido $d\omega_0$ no referencial comóvel com o observador, pode-se dizer que a quantidade de objetos dentro de um volume próprio dV definido pelo produto entre a seção reta ao grupo de geodésicas dA e um deslocamento dl no referencial de repouso do observador é dada simplesmente por

$$dN = n dV = n dA dl, \quad (2.13)$$

onde n é a *densidade numérica de fontes* no volume próprio. A figura 2.29, retirada de RS03, ilustra a relação entre as grandezas acima.

A seção reta dA pode ser relacionada ao ângulo sólido $d\omega_0$ medido pelo observador através da definição da *distância por área* d_A , como será melhor discutido em §2.6,

$$dA = (d_A)^2 d\omega_0. \quad (2.14)$$

Para reescrever o deslocamento dl em função de uma correspondente variação dy no parâmetro afim das geodésicas nulas, partimos do campo vetorial tangente a tais geodésicas, $k^a = dx^a/dy$, projetando-o na hipersuperfície espacial comóvel do observador. Para isso aplicamos o tensor de projeção h_{ab} , que define a foliação $\{3+1\}$ da variedade:

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b, \quad (2.15)$$

onde u_a é a velocidade do referencial para o qual se está projetando. Por causa da propriedade

$$h_{ab} u^b = 0, \quad (2.16)$$

o tensor de projeção zera a componente na direção de u^b de qualquer campo vetorial contraído com ele, fazendo o resultado de sua aplicação ficar contido no espaço tridimensional de repouso do observador movendo-se com velocidade u^b . Projetando o campo vetorial tangente as geodésicas nulas k^a ao espaço de repouso do observador tem-se que,

$$h_b^a k^b = k^a - u^a u_b k^b. \quad (2.17)$$

Por construção, a projeção do campo vetorial k^a é perpendicular a velocidade do observador u^a . Assim, pode-se escrever,

$$\eta_a u^a = 0, \quad (2.18)$$

onde η^a é o vetor unitário na direção da projeção de k^a , dada pelo lado direito da equação (2.17). Explicitando k^a e reescrevendo o vetor projeção $h_b^a k^b$ em função de seu módulo Π e de η^a obtém-se, a partir da mesma equação (2.17),

$$k^a = \Pi \eta^a + u^a u_b k^b. \quad (2.19)$$

Como k^a é um campo vetorial do tipo nulo escreve-se,

$$k^a k_a = (\Pi \eta^a + k^b u_b u^a) (\Pi \eta_a + k^b u_b u_a) = 0, \quad (2.20)$$

ou, explicitando o segundo produto,

$$\Pi^2 \eta^a \eta_a + (k^b u_b)^2 (u^a u_a) = 0, \quad (2.21)$$

uma vez que os termos que contêm o produto $\eta_a u^a$ zeram já que esses vetores são perpendiculares. Como u^a é um vetor do tipo temporal, $u_a u^a = +1$, segue da perpendicularidade acima que η^a necessariamente é um vetor do tipo espacial, $\eta_a \eta^a = -1$. Isso implica que,

$$\Pi = \pm k^b u_b. \quad (2.22)$$

Para sinais de luz que se aproximam deve-se escolher o sinal negativo. Substituindo esse resultado na equação (2.19) obtém-se o seguinte resultado:

$$k^a = -(k^b u_b)(\eta^a - u^a) = \frac{dx^a}{dy}, \quad (2.23)$$

que pode ser reexpresso como

$$dx^a = -(k^b u_b)(\eta^a - u^a)dy = [-(k^b u_b) dy] \eta^a + [(k^b u_b) dy] u^a. \quad (2.24)$$

Logo, percebe-se pela expressão do lado direito que uma variação dy no parâmetro afim das geodésicas nulas significa uma variação $(k^a u_a) dy$ no tempo próprio do observador (parâmetro afim da trajetória C do observador, definida pelo campo vetorial do tipo tempo u^a) e a um deslocamento espacial $dl = -(k^a u_a) dy$ (parâmetro afim da hipersuperfície de tempo cósmico constante, definida pelo campo vetorial do tipo espaço η^a). Assim, pode-se finalmente reescrever a equação (2.13) usando esse último resultado e o da equação (2.14) de modo que

$$dN = (d_A)^2 d\omega_0 n(-k^a u_a) dy. \quad (2.25)$$

É importante chamar atenção para o fato de o produto $n(-k^a u_a)$ ser determinado num referencial comóvel com as fontes. Por definição, a densidade numérica n de todas as fontes cosmológicas em um referencial comóvel é dada pela equação (2.10) ou pela equação (2.12) para a cosmologia específica estudada aqui.

Como demonstrado em Ellis (1971), pode-se obter a seguinte relação a partir da definição de desvio para o vermelho,

$$1 + z = \frac{[\nu]_{fonte}}{[\nu]_{obs}} = \frac{[k^a u_a]_{fonte}}{[k^a u_a]_{obs}}. \quad (2.26)$$

Pode-se representar todos os raios luminosos que chegam ao observador num mesmo tempo cósmico t por uma constante no cone de luz do passado desse observador. Assim, a função geratriz desse cone de luz escreve-se

$$w = [w(x^a)]_{obs} = cte. = [\tau]_{obs}, \quad (2.27)$$

onde $[\tau]_{obs}$ é o tempo próprio do observador e usou-se a arbitrariedade na escolha dessa constante para escrever a última igualdade. Em termos dessa função geratriz, o campo vetorial tangente às geodésicas nulas k_a é escrito simplesmente como

$$k_a = -\frac{dw}{dx^a}. \quad (2.28)$$

Dessa forma, o termo $[k^a u_a]_{obs}$ se escreve, pela equação (2.27), como

$$[k^a u_a]_{obs} = - \left[\frac{d\mathcal{W}}{dx^a} \frac{dx^a}{d\tau} \right]_{obs} = - \left[\frac{d\mathcal{W}}{d\tau} \right]_{obs} = -1, \quad (2.29)$$

o que permite reescrever a equação (2.26) para o observador considerado como

$$1 + z = -[k^a u_a]_{fonte}. \quad (2.30)$$

Substituindo esse resultado na equação (2.25) obtém-se

$$dN = (d_A)^2 d\omega_0 n (1 + z) dy. \quad (2.31)$$

Esse é um resultado geral muito importante pois independe da métrica e, portanto, do modelo cosmológico.

2.4 Problema numérico

Uma maneira bastante direta de obter o fator de escala, a contagem numérica e todas as demais grandezas que podem ser construídas a partir delas é tomar a coordenada radial r como uma variável independente. Como a coordenada temporal está implicitamente definida na contagem numérica pela variação do parâmetro afim dy na equação (2.25), para resolver numericamente essa equação é preciso reescrevê-la de modo a explicitar a variável independente. Pode-se escrever a geodésica radial nula na geometria dada pela métrica (2.1) como,

$$\frac{dt}{dr} = - \left(\frac{a}{c\sqrt{1 - kr^2}} \right), \quad (2.32)$$

onde o sinal negativo garante que estamos tratando de geodésicas que convergem para o observador em $t = 0$. Como ao longo de geodésicas nulas ambas as coordenadas t e r são funções do parâmetro afim y , tem-se que

$$\frac{dt}{dy} = \frac{dt}{dr} \frac{dr}{dy} = - \left(\frac{a}{c\sqrt{1 - kr^2}} \right) \frac{dr}{dy}. \quad (2.33)$$

Assumindo um referencial comóvel com o observador, em unidades métricas, temos que $u^a = c \delta_0^a$ e por consequência valem os seguintes resultados,

$$-k^a u_a = -c k^a g_a^0 = -c k^0 = -c \frac{dt}{dy} = \left(\frac{a}{\sqrt{1 - kr^2}} \right) \frac{dr}{dy}. \quad (2.34)$$

Além disso, lembrando que a distância por área d_A é definida através de uma relação entre a seção reta da fonte dA , medida intrinsecamente, e o ângulo sólido observado $d\omega_0$,

equação (2.14), tem-se que

$$(d_A)^2 = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)}{(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)} = (ar)^2. \quad (2.35)$$

Nota-se que para essa métrica a distância por área, uma grandeza definida de maneira estritamente observacional, é igual à *distância própria* d_{pr} , uma grandeza relativística.

Considerando a equação (2.7) e substituindo as equações (2.12), (2.34) e (2.35) na equação (2.25), lembrando que para uma dependência puramente radial $d\omega_0 = 4\pi$, pode-se então escrever o número de fontes ao longo do cone de luz do passado nessa cosmologia em termos da coordenada radial r . Essa grandeza é dada pela seguinte expressão

$$\frac{dN}{dr} = \left(\frac{3 c \Omega_{m_0} H_0^2 a_0^3}{2G\mathcal{M}_g} \right) \left[\frac{r^2}{\sqrt{c^2 - H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1) r^2}} \right]. \quad (2.36)$$

Para explicitar a dependência do fator de escala com a coordenada radial pode-se, considerando a equação (2.7), reescrever a equação para a geodésica nula (2.32) como,

$$\frac{dt}{dr} = - \left[\frac{a^2}{c^2 - H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1) r^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.37)$$

Ao longo do cone de luz do passado, pode-se escrever o fator de escala em termos da coordenada radial como,

$$\frac{da}{dr} = \frac{da}{dt} \frac{dt}{dr}, \quad (2.38)$$

e, portanto, pode-se reescrever a equação (2.9) em termos da coordenada radial,

$$\frac{da}{dr} = -H_0 \left[\frac{(\Omega_{\Lambda_0})a^4 - a_0^2(\Omega_0 - 1)a^2 + (\Omega_{m_0} a_0^3)a}{c^2 - H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1) r^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.39)$$

Para encontrar soluções $a(r)$ e $N(r)$ é preciso adotar valores numéricos para Ω_{m_0} , Ω_{Λ_0} e H_0 . As duas equações diferenciais (2.36) e (2.39) determinam o problema numérico, uma vez que podem ser escritas em termos da coordenada radial e resolvidas simultaneamente por métodos numéricos, permitindo que se gerem tabelas para r , a e N . Uma rotina que use o método de Runge-Kutta de quarta ordem é suficiente para resolver o problema. As condições iniciais r_0 e N_0 são zero, enquanto a_0 pode ser determinado considerando que quando $r \rightarrow 0$ o espaço-tempo é aproximadamente o de Minkowski, ou seja, $k \approx 0$. Isso leva, pela equação (2.32), a $t = -r$ e finalmente a $a_0 = 1$.

Nas próximas seções serão obtidas expressões numéricas gerais para outras grandezas de interesse do trabalho. Em seguida, tais expressões são especializadas para o modelo cosmológico considerado. No entanto, é importante chamar atenção para a generalidade do formalismo apresentado aqui: considerando uma equação para da/dr para um dado

modelo cosmológico qualquer, obtida através de uma equação para da/dt do tipo de Friedmann e de outra para dt/dr obtida através das geodésicas nulas do modelo, pode-se aplicar todo o formalismo desse capítulo para se conduzir os testes de consistência discutidos no capítulo 3 e o estudo das densidades radiais discutido no capítulo 4. Vistas todas as equações, o esquema numérico geral será explicitado em sua completude e um exemplo de aplicação prática dele dado no apêndice C.

2.5 Densidade relativística por fonte

Seguindo demonstração similar em Ellis (1971) e Moura Júnior (1997), para a métrica EdS, partindo da definição para o *desvio para o vermelho* dada na equação (2.26) e assumindo que a fonte e o observador são comóveis ($u^a = c\delta_0^a$) escreve-se

$$1 + z = \frac{[ck_0]_{fonte}}{[ck_0]_{obs}} = \frac{[ck^0]_{fonte}}{[ck^0]_{obs}}. \quad (2.40)$$

Substituindo $k^0 = dx^0/dy = dt/dy$ na equação (2.40) obtém-se

$$1 + z = \left[c \frac{dt}{dy} \right]_{fonte} \left[c \frac{dt}{dy} \right]_{obs}^{-1}. \quad (2.41)$$

Pode-se reescrever o resultado acima a partir da equação (2.33) como,

$$1 + z = \left[- \left(\frac{a}{\sqrt{1 - kr^2}} \right) \frac{dr}{dy} \right]_{fonte} \left[- \left(\frac{a_0}{\sqrt{1 - kr^2}} \right) \frac{dr}{dy} \right]_{obs}^{-1}. \quad (2.42)$$

Partindo da Lagrangeana radial associada à métrica FLRW,

$$L = \left(\frac{dt}{dy} \right)^2 - \frac{a^2}{c^2(1 - kr^2)} \left(\frac{dr}{dy} \right)^2, \quad (2.43)$$

e aplicando essa Lagrangeana às equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dy} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (2.44)$$

onde o ponto significa derivada total em relação ao parâmetro afim y . Fazendo $\dot{q} = \dot{r}$, obtém-se a seguinte expressão:

$$\frac{d}{dy} \left[-2 \frac{a^2}{c^2(1 - kr^2)} \frac{dr}{dy} \right] = 0, \quad (2.45)$$

o que implica escrever, dada a constância da velocidade da luz c ,

$$\frac{dr}{dy} = -\frac{1 - kr^2}{a^2} \times cte. \quad (2.46)$$

Substituindo esse resultado na equação (2.42) obtém-se, finalmente,

$$1 + z = \left[\left(\frac{a}{\sqrt{1 - kr^2}} \right) \frac{1 - kr^2}{a^2} \right]_{fonte} \left[\left(\frac{a_0}{\sqrt{1 - kr^2}} \right) \frac{1 - kr^2}{a_0^2} \right]_{obs}^{-1} = \frac{a_0}{a}, \quad (2.47)$$

onde a última igualdade é garantida pois, na métrica FLRW considerada, $\Omega_0 = 1$ e, com isso, $k = 0$. Fica claro que a solução numérica do fator de escala $a(r)$ fornece imediatamente a solução numérica $z(r)$. Pode-se obter a *contagem numérica diferencial* dN/dz através da expressão

$$\frac{dN}{dz} = \frac{dr}{dz} \frac{dN}{dr}, \quad (2.48)$$

com ajuda da útil relação,

$$\frac{dr}{dz} = \frac{dr}{da} \frac{da}{dz}. \quad (2.49)$$

Numericamente, como todas as grandezas podem ser construídas usando $N(r)$ e $a(r)$, qualquer derivada em relação ao desvio para o vermelho dessas grandezas que se queira obter pode ser escrita de maneira similar em termos da derivada em relação à coordenada radial daquela grandeza. As derivadas na equação (2.49) podem ser tomadas do resultado (2.47) e da equação (2.39), permitindo que se escreva,

$$\frac{dr}{dz} = \frac{a^2 H_0}{a_0} \left[\frac{(\Omega_{\Lambda_0})a^4 - a_0^2(\Omega_0 - 1)a^2 + (\Omega_{m_0}a_0^3)a}{c^2 - H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1)r^2} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.50)$$

o que, juntamente com a equação (2.36), permite que a equação (2.48) seja reescrita como segue,

$$\frac{dN}{dz} = \left(\frac{3 c \Omega_{m_0} H_0 a_0^2}{2G\mathcal{M}_g} \right) \left[\frac{r^2 a^2}{\sqrt{(\Omega_{\Lambda_0})a^4 - a_0^2(\Omega_0 - 1)a^2 + (\Omega_{m_0}a_0^3)a}} \right]. \quad (2.51)$$

A *densidade relativística por fonte* μ é definida em termos da contagem numérica diferencial (Stoeger, Ellis & Nel 1992) como

$$\mu = \frac{\mathcal{M}_g}{(d_A)^2 d\Omega} \frac{dN}{dz}, \quad (2.52)$$

que, por meio da equação (2.51) torna-se

$$\mu = \left(\frac{3 c \Omega_{m_0} H_0 a_0^2}{8\pi G} \right) \left[\frac{1}{(\Omega_{\Lambda_0})a^4 - a_0^2(\Omega_0 - 1)a^2 + (\Omega_{m_0}a_0^3)a} \right]^{1/2}. \quad (2.53)$$

2.6 Distâncias observacionais

Até agora usou-se apenas a definição de distância por área d_A , como está discutida em Ribeiro (2005). A figura 2.2 ilustra as grandezas envolvidas na definição dessa distância pela equação (2.14), também conhecida como *distância por diâmetro angular*, *distância por luminosidade corrigida* ou *distância por área do observador*.

Outra distância observacional de interesse é a *distância por luminosidade*, obtida a partir da relação entre as magnitudes aparente m e absoluta M de uma fonte:

$$m - M = 5 \log d_L - 5, \quad (2.54)$$

Pode-se também definir a *distância por área galáctica* d_G , também conhecida como *distância efetiva*, *distância por tamanho angular*, *distância comóvel transversa* ou *distância de movimento próprio*, como uma relação similar a que define d_A mas do lado oposto onde as áreas são especificadas:

$$d\sigma_G = d\Omega_G (d_G)^2. \quad (2.55)$$

Assim, o ângulo sólido $d\Omega_G$ é medido no referencial de repouso da fonte e a seção reta $d\sigma_G$ é medida aqui. A figura 2.2 ilustra a relação entre tais grandezas.

Por fim, pode-se ainda definir uma distância por desvio para o vermelho segundo a relação

$$d_z = \frac{cz}{H_0}, \quad (2.56)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo, obtida a partir da relação velocidade-distância de Hubble. Tal relação é estritamente válida apenas para $z < 1$ (Harrison 1993) embora possa simplesmente ser adotada como uma definição de d_z para todos os z .

Tais distâncias observacionais são relacionadas pelo resultado geral que é o *teorema de reciprocidade* de Etherington (1933; ver também Ellis 1971, 2007):

$$d_L = (1 + z)^2 d_A = (1 + z) d_G. \quad (2.57)$$

Embora o teorema da reciprocidade seja independente do modelo cosmológico, o cálculo específico das grandezas apresentadas nas seções anteriores se aplica apenas à cosmologias FLRW, o que significa que d_A , d_L , d_G e d_z devem ser determinadas nessa cosmologia. Portanto, considerando a equação (2.35) para d_A e o teorema da reciprocidade (2.57), é trivial escrever as outras distâncias cosmológicas em termos do fator de escala, como segue,

$$d_L = a_0^2 \left(\frac{r}{a} \right), \quad (2.58)$$

$$d_G = a_0 r, \quad (2.59)$$

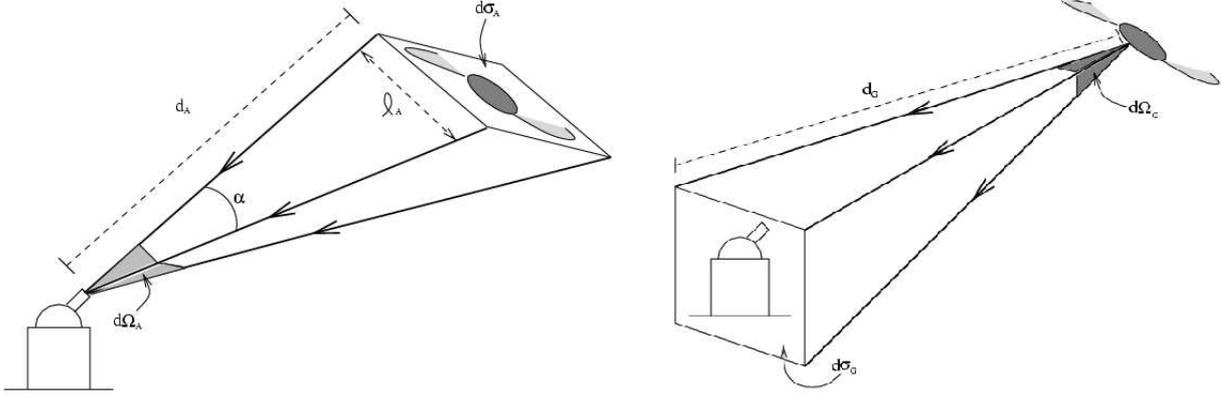


Figura 2.2: A distância por área d_A é determinada a partir da relação entre a seção reta $d\sigma_A$ medida no referencial de repouso da fonte e o ângulo sólido $d\Omega_A$, no texto $d\omega_0$, medido pelo observador enquanto a distância por área galáctica d_G é determinada a partir da relação entre a seção reta $d\sigma_A$ medida aqui e o ângulo sólido $d\Omega_A$ medido no referencial de repouso da fonte (Ribeiro 2005).

$$d_z = \frac{c}{H_0} \left(\frac{a_0}{a} - 1 \right). \quad (2.60)$$

Será chamada genericamente d_i uma determinada distância observacional, que pode ser qualquer uma das quatro definidas anteriormente ($i = A, G, L, z$).

2.7 Densidades radiais

A *densidade diferencial* γ_i a uma certa distância d_i é definida como (Ribeiro 2005; Albani *et al.* 2007; Rangel Lemos & Ribeiro 2008)

$$\gamma_i = \frac{1}{4\pi(d_i)^2} \frac{dN}{d(d_i)}. \quad (2.61)$$

Tal grandeza expressa como o número de galáxias contidas em uma dado volume de raio $d_i(z)$ varia em uma casca esférica de mesmo raio, para um determinado desvio para o vermelho z . A *densidade diferencial integral* por sua vez expressa o número de galáxias em um dado *volume* de raio $d_i(z)$ e é dada por,

$$\gamma_i^* = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \gamma_i dV_i. \quad (2.62)$$

Aqui V_i é o *volume observacional*, definido como,

$$V_i = \frac{4\pi}{3} (d_i)^3. \quad (2.63)$$

Essas grandezas são úteis na determinação de se é possível ou não, e em quais alcances, um model cosmológico espacialmente homogêneo ser também observacionalmente homogêneo,

como será discutido no capítulo 4.

Do ponto de vista numérico é interessante escrever essas densidades em termos do desvio para o vermelho. Dessa forma, a densidade diferencial pode ser escrita como

$$\gamma_i = \frac{dN}{dz} \left\{ 4\pi(d_i)^2 \frac{d(d_i)}{dz} \right\}^{-1}, \quad (2.64)$$

onde pode-se obter numericamente z , d_i e dN/dz em função de r . Falta determinar as derivadas de cada distância com o desvio para o vermelho. Começando com a distância por área d_A , as demais podem ser facilmente obtidas a partir das equações (2.35) e (2.47). Segue que

$$\frac{d(d_A)}{dz} = \frac{da}{dz} \frac{dr}{da} \frac{d(d_A)}{dr} = -\frac{a^2}{a_0} \left[r + a \left(\frac{da}{dr} \right)^{-1} \right], \quad (2.65)$$

e, considerando a equação (2.39), essa expressão pode ser reescrita como

$$\frac{d(d_A)}{dz} = \frac{a^2}{a_0} \left[\frac{a}{H_0} \sqrt{\frac{c^2 - H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1) r^2}{(\Omega_{\Lambda_0}) a^4 - a_0^2 (\Omega_0 - 1) a^2 + (\Omega_{m_0} a_0^3) a}} - r \right]. \quad (2.66)$$

As outras distâncias observacionais podem ser calculadas numericamente a partir da equação (2.65), considerado o teorema da reciprocidade (2.57). Portanto, tem-se que

$$\frac{d(d_L)}{dz} = 2(1+z)d_A + (1+z)^2 \frac{d(d_A)}{dz}, \quad (2.67)$$

$$\frac{d(d_G)}{dz} = d_A + (1+z) \frac{d(d_A)}{dz}. \quad (2.68)$$

Essas duas equações podem também ser reescritas em termos do fator de escala se consideradas as equações (2.47) e (2.66), levando a

$$\frac{d(d_L)}{dz} = a_0 \left[\frac{a}{H_0} \sqrt{\frac{c^2 - H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1) r^2}{(\Omega_{\Lambda_0}) a^4 - a_0^2 (\Omega_0 - 1) a^2 + (\Omega_{m_0} a_0^3) a}} + r \right], \quad (2.69)$$

$$\frac{d(d_G)}{dz} = \frac{a^2}{H_0} \sqrt{\frac{c^2 - H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1) r^2}{(\Omega_{\Lambda_0}) a^4 - a_0^2 (\Omega_0 - 1) a^2 + (\Omega_{m_0} a_0^3) a}}. \quad (2.70)$$

Os resultados para as densidades diferenciais definidas nas diferentes distâncias para o modelo FLRW padrão ($\Omega_m=0.3$, $\Omega_\Lambda=0.7$, $h = 0.70$) estão representados na figura 2.3.

Um último ponto ainda precisa ser discutido. A densidade diferencial integral (2.62) é resultado de uma integração de γ_i sobre um volume radial. A forma mais simples de calcular numericamente essa grandeza é demonstrada a seguir. Diferenciando γ_i^* em

relação ao volume obtém-se

$$\frac{d(\gamma_i^* V_i)}{dV_i} = \gamma_i, \quad (2.71)$$

e esse resultado leva à seguinte expressão:

$$\frac{d(\gamma_i^* V_i)}{dz} = \frac{d(\gamma_i^* V_i)}{dV_i} \frac{dV_i}{dz} = \gamma_i \frac{dV_i}{dz} = \frac{dN}{dz}. \quad (2.72)$$

Similarmente é simples concluir que

$$\frac{d(\gamma_i^* V_i)}{dr} = \frac{dN}{dr}. \quad (2.73)$$

Finalmente das definições de γ_i e γ_i^* , é fácil mostrar a validade da seguinte expressão:

$$\gamma_i^* = \frac{N}{V_i}. \quad (2.74)$$

Portanto, a solução numérica da equação (2.36) juntamente com a determinação numérica de todas as distâncias, como dadas pelas equações (2.35), (2.58), (2.59), (2.60), permitem que se calcule o volume na equação (2.63) e γ_i^* . Os resultados para essas grandezas definidas nas diferentes distâncias para o modelo FLRW padrão ($\Omega_m=0.3$, $\Omega_\Lambda=0.7$, $h = 0.70$) estão representados na figura 2.4.

2.8 Volumes

A maior parte das funções de luminosidade são determinadas usando o *volume comóvel*, enquanto que as densidades derivadas da teoria assumem o *volume próprio*. Portanto, para que se possa comparar grandezas teóricas com suas correspondentes observações é preciso que se faça uma conversão de volumes. Da métrica (2.1) é fácil ver que

$$dV_{Pr} = \frac{a^3}{\sqrt{1 - kr^2}} r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi = a^3 dV_C, \quad (2.75)$$

Essa equação claramente define o fator de conversão entre essas duas definições de volume em termos do esquema numérico definido anteriormente.

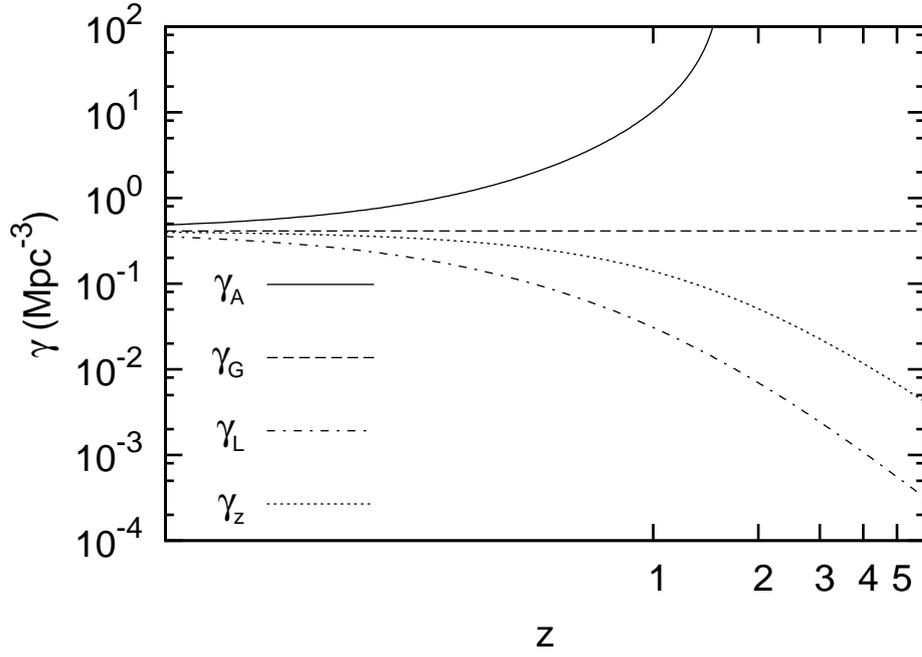


Figura 2.3: Evolução com o desvio para o vermelho das densidades diferenciais teóricas γ para as várias definições cosmológicas de distância no modelo cosmológico padrão, adotando a métrica FLRW com $H_0 = 70 \text{ km Mpc}^{-1} \text{ s}^{-1}$, $\Omega_{m_0} = 0.3$ e $\Omega_\Lambda = 0.7$.

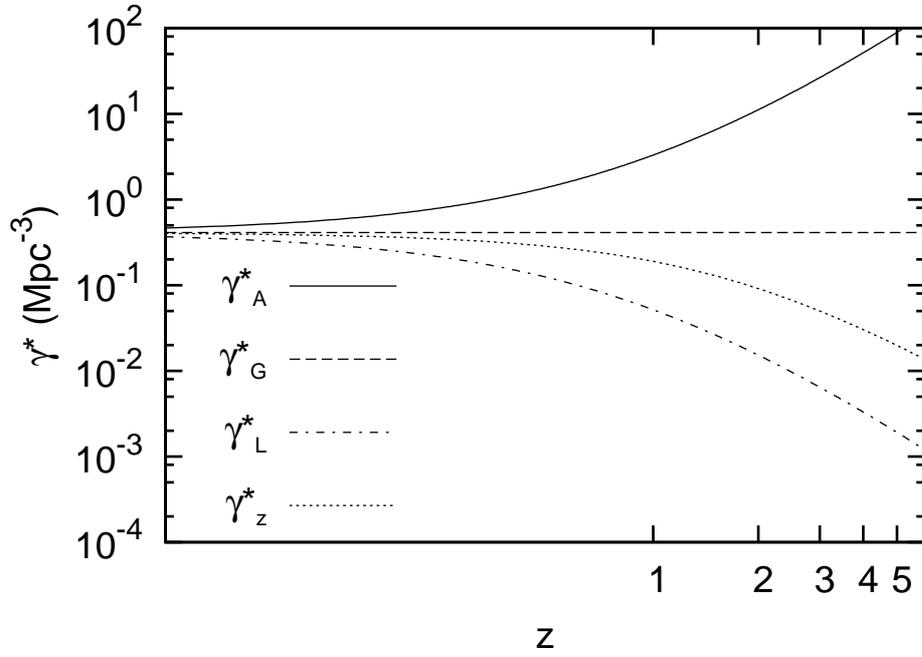


Figura 2.4: Evolução com o desvio para o vermelho das densidades diferenciais integrais teóricas γ^* para o modelo cosmológico padrão, assumindo a métrica FLRW com $H_0 = 70 \text{ km Mpc}^{-1} \text{ s}^{-1}$, $\Omega_{m_0} = 0.3$ e $\Omega_\Lambda = 0.7$.

Capítulo 3

Testes de consistência

Esse capítulo estabelece a conexão entre as quantidades teóricas obtidas no capítulo 2 e suas correspondentes quantidades observadas, obtidas a partir da função de seleção de um dado catálogo, como discutido no capítulo 1. É então natural testar a consistência entre teoria e observação, o que é feito de três maneiras distintas. Por fim propõe-se um modelo puramente empírico para a massa estelar média $\mathcal{M}_g(z)$ que apenas recupere a consistência ideal, sem supor qualquer explicação de natureza teórica.

3.1 Formalismo geral

Objetiva-se estabelecer uma conexão entre o valor previsto pela teoria para uma grandeza $T(\zeta)$ em um dado valor do parâmetro ζ e a correspondente observação $[T(\zeta)]_{obs}$ para o mesmo valor de ζ . Assume-se que essas quantidades estejam relacionadas através de uma *função de completeza* $J(\zeta)$, tal que

$$[T(\zeta)]_{obs} = J(\zeta) T(\zeta). \quad (3.1)$$

Tal função $J(\zeta)$ explicita o quão próximo o comportamento previsto pela teoria para a grandeza $T(\zeta)$ está daquilo que é observado. Uma vez obtida $J(\zeta)$, por linearidade podemos usar a equação (3.1) para determinar o comportamento observacional de quaisquer quantidades proporcionais a $T(\zeta)$.

Para obter $J(\zeta)$, no entanto, precisamos comparar o comportamento de uma quantidade observada com uma teoria para esse comportamento. No caso específico desse trabalho escolheu-se comparar a densidade numérica radial n , obtida do modelo cosmológico segundo a discussão da seção §2.2, com a densidade numérica radial observada, expressa pela função de seleção ψ . Portanto, a equação (3.1) específica para esse trabalho escreve-se

$$\psi(z) = J(z) n_c(z), \quad (3.2)$$

onde o índice C indica que a densidade numérica radial deve ser escrita em termos do volume comóvel, uma vez que é usual que a FL seja expressa usando o volume comóvel. É importante notar que na equação (3.2) a função de completeza é independente do volume e, portanto, qualquer quantidade observacional obtida usando a primeira na equação (3.1) será expressa na mesma definição de volume do valor previsto pela teoria $T(z)$ para aquele dado desvio para o vermelho z .

A maior parte das grandezas observacionais usadas nesse trabalho é proporcional à contagem diferencial dN/dz . Portanto, conectar o comportamento previsto para essa grandeza com aquele construído a partir das observações é um passo essencial para aplicar a equação (2.25). Para tanto, é interessante escrever uma equação do tipo da (3.1) em termos das contagens observadas $[dN]_{obs}$ como segue,

$$[dN]_{obs} = J(z)dN. \quad (3.3)$$

Considerando agora as duas equações (3.2) e (3.3) obtém-se,

$$\left[\frac{dN}{dz} \right]_{obs} = J(z) \frac{dN}{dz} = \frac{\psi(z)}{n_C(z)} \frac{dN}{dz}. \quad (3.4)$$

Lembrando que a densidade numérica em volume próprio é dada por

$$n = \frac{N}{V_{Pr}}, \quad (3.5)$$

a equação (3.4) pode também ser escrita como,

$$\left[\frac{dN}{dz} \right]_{obs} = \frac{V_C}{V_{Pr}} \frac{\psi}{n} \frac{dN}{dz}. \quad (3.6)$$

É importante chamar a atenção para o fato de que a transformação de volumes nessas equações é consequência de $J(z)$ ser independente da definição de volume e, portanto, *não* muda a definição de volume usada em ambas $[dN/dz]_{obs}$ e dN/dz quando obtidas por meio da equação (2.25). Isso porque, como mencionado anteriormente, qualquer grandeza observacional proporcional à contagem diferencial dN/dz obtida por meio da equação (3.6) terá a definição de volume igual a dada por seu comportamento teórico. É a definição de volume usada para a densidade numérica n na equação (2.25) que define o volume de ambas $[dN/dz]_{obs}$ e dN/dz , como será mostrado a seguir.

Partindo da equação (2.31) escreve-se,

$$\frac{dN}{dz} = n (d_A)^2 (1+z) d\omega_0 \frac{dy}{dz}. \quad (3.7)$$

Portanto, as equações (3.4) e (3.6) tornam-se,

$$\left[\frac{dN}{dz} \right]_{obs} = J(z) (d_A)^2 (1+z) d\omega_0 n(y) \frac{dy}{dz} = \left[\frac{V_C}{V_{Pr}} (d_A)^2 (1+z) d\omega_0 \frac{dy}{dz} \right] \psi. \quad (3.8)$$

Note que nessa expressão $[dN/dz]_{obs}$ é dada em termos de volume próprio seguindo a densidade numérica n . Essas expressões ainda são gerais e independentes do modelo cosmológico. A cosmologia específica irá aparecer quando forem especializados os termos entre os colchetes no lado direito dessa equação. No entanto, a grandeza em si continua independente do modelo cosmológico. Ao especializar a equação (3.8) e levar em consideração a mesma cosmologia usada na obtenção da FL que deu origem à função de seleção ψ nessa equação, o que se faz é justamente retirar dos dados tratados da FL o modelo cosmológico suposto e obter uma quantidade que independa dele. Dessa forma, esse formalismo é capaz de extrair da FL de um catálogo de galáxias o observável primário, $[dN/dz]_{obs}$, que independe do modelo cosmológico assumido no volume da FL. Esse resultado importante será novamente usado no capítulo 4.

Considerando a expressão (1.7), a função de completeza definida na equação (3.2) pode ser reescrita como segue,

$$J(z) = \frac{1}{n_C(z)} \sum_w a_w \frac{\sum_v P_v \mathcal{M}_v \psi_v^W(z)}{\sum_v P_v \mathcal{M}_v}. \quad (3.9)$$

A incerteza da função de completeza δJ segue trivialmente a equação acima, substituindo as funções de seleção específicas ψ_v^W por suas respectivas incertezas. Uma vez que a dependência com z encontra-se apenas nas funções de seleção específicas, já que a densidade numérica em volume comóvel n_C é constante na cosmologia padrão estudada, a derivada em relação ao desvio para o vermelho da função de completeza é simplesmente

$$\frac{dJ}{dz} = \frac{1}{n_C} \sum_w a_w \frac{\sum_v P_v \mathcal{M}_v \frac{d\psi_v^W}{dz}}{\sum_v P_v \mathcal{M}_v}, \quad (3.10)$$

onde as derivadas das funções de seleção específicas podem ser obtidas a partir da forma analítica ϕ_v^W ajustada à FL do catálogo estudado, partindo da equação (1.5),

$$\frac{d\psi_v^W}{dz} = \int_{l_{im}^W}^{\infty} \frac{d\phi_v^W}{dz} dl. \quad (3.11)$$

Substituindo a expressão (1.7) na equação (3.8) obtém-se o seguinte resultado,

$$\left[\frac{dN}{dz} \right]_{obs} = \left[\frac{V_C}{V_{Pr}} (d_A)^2 (1+z) d\Omega \frac{dy}{dz} \right] \sum_w a_w \frac{\sum_v P_v \mathcal{M}_v \psi_v^W}{\sum_v P_v \mathcal{M}_v}. \quad (3.12)$$

Os valores da contagem diferencial observados nos desvios para o vermelho de RS03

levando em conta o modelo evolução completo proposto em L99 encontram-se na tabela 3.1. Tais valores para os dados do catálogo de G04 estão na tabela 3.2. É importante notar que as equações (3.6) e (3.12) são basicamente as mesmas. A primeira é escrita de uma maneira mais compacta enquanto a segunda expande as dependências em morfologias, em bandas da função de seleção e nas características relativísticas do espaço-tempo, como indicado pela expressão (3.7). Por fim, como $J(z)$ é obtida a partir da equação (3.9) ela também é uma grandeza independente do volume, o que permite que ela seja usada posteriormente com a definição de volume que melhor interessar.

O formalismo descrito nessa seção será utilizado a seguir no estudo da consistência de três grandezas observáveis, construídas a partir das funções de seleção de §1.2, com o modelo cosmológico suposto nas FL usadas na determinação dessas grandezas.

3.2 Primeiro teste: densidade comóvel

Seguindo a discussão apresentada em RS03, o primeiro teste de consistência é feito através de uma comparação entre a evolução com o desvio para o vermelho dos valores teóricos para a densidade local ρ na cosmologia adotada e os respectivos valores $[\rho]_{obs}$ obtidos através da FL de um determinado catálogo.

A quantidade teórica pode ser expressa no volume comóvel como,

$$\rho = \Omega_{m_0} \rho_c, \quad (3.13)$$

valendo aproximadamente $2.81268 \times 10^{11} \mathcal{M}_\odot Mpc^{-3}$ para o modelo de Einstein-de Sitter com $h = 1$ assumido em L99 e aproximadamente $4.13464 \times 10^{10} \mathcal{M}_\odot Mpc^{-3}$ para o modelo FLRW com $h = 0.7$ assumido no catálogo de G04.

Os valores observados para as densidades em ambos os catálogos podem ser obtidos de,

$$[\rho(z)]_{obs} = \frac{\mathcal{M}_g [N(z)]_{obs}}{V_c} = \frac{\mathcal{M}_g}{V_c} \int_0^z \left[\frac{dN}{dz'} \right]_{obs} dz'. \quad (3.14)$$

Para calcular a última integral interpolou-se uma função polinomial aos valores de $[dN/dz]_{obs}$ obtidos a partir da função de completeza segundo a equação (3.12). A incerteza em $[\rho]_{obs}$ é trivialmente escrita em termos da incerteza em $[N]_{obs}$, discutida no apêndice B, como segue,

$$[\delta\rho(z)]_{obs} = \frac{\mathcal{M}_g [\delta N(z)]_{obs}}{V_c}. \quad (3.15)$$

Em RS03 aplicou-se esse teste usando a contagem diferencial $[dN/dz]_{obs}$ obtida a partir dos resultados para os dados de L99 na tabela 1.2, que assumiam uma cosmologia EdS. Nesse trabalho repetiu-se esse teste para os dados usando o modelo de evolução completo de L99, ainda assumindo uma cosmologia EdS e para os de G04, assumindo uma cosmologia Λ CDM padrão. Os resultados encontram-se nas tabelas 3.3 e 3.2, onde

Tabela 3.1: Contagem numérica diferencial para os dados do CNOC2 usando o modelo de evolução completo proposto em L99 para os dados tipos morfológicos: recentes ($v=1$), intermediárias ($v=2$) e antigas ($v=3$).

z	dN/dz ($\times 10^9$)	$[dN/dz]_{obs}$ ($\times 10^9$)	$[dN/dz]_{obs}^1$ ($\times 10^9$)	$[dN/dz]_{obs}^2$ ($\times 10^9$)	$[dN/dz]_{obs}^3$ ($\times 10^9$)
0.05	2.05638	0.00890 \pm 0.00001	0.01221 \pm 0.00001	0.00890 \pm 0.00001	0.02227 \pm 0.00004
0.12	9.75308	0.04438 \pm 0.00015	0.05414 \pm 0.00013	0.04438 \pm 0.00015	0.12800 \pm 0.00061
0.25	30.38036	0.15172 \pm 0.00108	0.14889 \pm 0.00074	0.15172 \pm 0.00108	0.57010 \pm 0.00562
0.40	55.13624	0.30660 \pm 0.00350	0.23411 \pm 0.00187	0.30660 \pm 0.00350	1.56445 \pm 0.02473
0.55	76.44248	0.47343 \pm 0.00743	0.28132 \pm 0.00308	0.47343 \pm 0.00743	3.28278 \pm 0.07146
0.75	97.99437	0.70082 \pm 0.01501	0.29815 \pm 0.00446	0.70082 \pm 0.01501	7.32333 \pm 0.21780
0.90	109.61776	0.87344 \pm 0.02245	0.28928 \pm 0.00520	0.87344 \pm 0.02245	12.42495 \pm 0.44405
1.00	115.54106	0.98953 \pm 0.02827	0.27737 \pm 0.00554	0.98953 \pm 0.02827	17.29681 \pm 0.68747

pode-se ver que a densidade local observada não parece consistente com o comportamento constante previsto acima pelos modelos, variando em cerca de uma ordem de grandeza dentro do intervalo de desvio para o vermelho mais profundo de G04 e de maneira menos pronunciada, mas ainda além das incertezas para os dados de todos os tipos espectrais estudados em L99. É portanto razoável considerar que essa evolução na densidade observada é devida a uma evolução expressa na própria função de completeza $J(z)$. Mais ainda, como em RS03 tal inconsistência não foi detectada nos dados de L99, é razoável supor que ela seja dominada pela evolução do parâmetro ϕ^* , desconsiderada naquele trabalho. Tal dominância não chega a ser uma surpresa, embora a princípio longe de óbvia dada a natureza não-linear das equações, visto que ϕ^* é o parâmetro de Schechter relacionado ao número de objetos e tal teste de consistência com o modelo cosmológico compara densidades numéricas.

3.3 Segundo teste: densidade relativística por fonte

Ainda seguindo RS03, construiu-se gráficos que comparam os valores teóricos e observados para a densidade relativística por fonte μ para os dados de L99 calculados como em RS03, para os mesmos dados levando em consideração o modelo de evolução completo e os diferentes tipos espectrais e para os dados de G04 com e sem evolução do parâmetro ϕ^* , motivado pela discussão da seção anterior.

Para obter explicitamente tais grandezas, substituindo a equação (3.4) na equação (2.52), encontra-se,

$$\mu(z) = \frac{\mathcal{M}_g}{(d_A)^2 d\Omega} \frac{dN}{dz} = \frac{\mathcal{M}_g}{(d_A)^2 d\Omega} \frac{1}{J(z)} \left[\frac{dN}{dz} \right]_{obs} = \frac{[\mu]_{obs}}{J(z)}. \quad (3.16)$$

Aqui ambas $[\mu]_{obs}$ e μ são escritas em termos de volume próprio, uma vez que são originadas das equações (3.7) e (3.8). Para poder comparar os resultados encontrados nesse trabalho

Tabela 3.2: Densidade local em volume comóvel na métrica FLRW e a contagem numérica diferencial para os dados do levantamento FDF

z	$[\rho]_{obs}$ ($\times 10^{10} \mathcal{M}_{\odot} \text{Mpc}^{-3}$)	dN/dz ($\times 10^{10}$)	$[dN/dz]_{obs}$ ($\times 10^{10}$)
0.50	3.03 $\begin{smallmatrix} +0.30 \\ -0.28 \end{smallmatrix}$	6.07	1.92 $\begin{smallmatrix} +0.24 \\ -0.23 \end{smallmatrix}$
0.75	1.84 $\begin{smallmatrix} +0.29 \\ -0.27 \end{smallmatrix}$	10.28	2.60 $\begin{smallmatrix} +0.34 \\ -0.32 \end{smallmatrix}$
1.00	1.40 $\begin{smallmatrix} +0.29 \\ -0.28 \end{smallmatrix}$	13.80	2.86 $\begin{smallmatrix} +0.40 \\ -0.37 \end{smallmatrix}$
1.25	1.17 $\begin{smallmatrix} +0.32 \\ -0.30 \end{smallmatrix}$	16.43	2.87 $\begin{smallmatrix} +0.41 \\ -0.39 \end{smallmatrix}$
1.50	1.02 $\begin{smallmatrix} +0.36 \\ -0.35 \end{smallmatrix}$	18.26	2.74 $\begin{smallmatrix} +0.41 \\ -0.39 \end{smallmatrix}$
1.75	0.91 $\begin{smallmatrix} +0.45 \\ -0.44 \end{smallmatrix}$	19.44	2.54 $\begin{smallmatrix} +0.39 \\ -0.38 \end{smallmatrix}$
2.00	0.83 $\begin{smallmatrix} +0.66 \\ -0.64 \end{smallmatrix}$	20.13	2.32 $\begin{smallmatrix} +0.37 \\ -0.36 \end{smallmatrix}$
2.25	0.76 $\begin{smallmatrix} +1.38 \\ -1.35 \end{smallmatrix}$	20.45	2.10 $\begin{smallmatrix} +0.35 \\ -0.34 \end{smallmatrix}$
2.50	0.71 $\begin{smallmatrix} +5.29 \\ -5.21 \end{smallmatrix}$	20.52	1.89 $\begin{smallmatrix} +0.32 \\ -0.32 \end{smallmatrix}$
2.75	0.66 $\begin{smallmatrix} +0.83 \\ -0.82 \end{smallmatrix}$	20.40	1.70 $\begin{smallmatrix} +0.30 \\ -0.29 \end{smallmatrix}$
3.00	0.62 $\begin{smallmatrix} +0.43 \\ -0.43 \end{smallmatrix}$	20.15	1.53 $\begin{smallmatrix} +0.28 \\ -0.27 \end{smallmatrix}$
3.25	0.59 $\begin{smallmatrix} +0.28 \\ -0.28 \end{smallmatrix}$	19.81	1.38 $\begin{smallmatrix} +0.25 \\ -0.25 \end{smallmatrix}$
3.50	0.56 $\begin{smallmatrix} +0.21 \\ -0.21 \end{smallmatrix}$	19.41	1.25 $\begin{smallmatrix} +0.24 \\ -0.24 \end{smallmatrix}$
3.75	0.54 $\begin{smallmatrix} +0.16 \\ -0.16 \end{smallmatrix}$	18.97	1.13 $\begin{smallmatrix} +0.22 \\ -0.22 \end{smallmatrix}$
4.00	0.52 $\begin{smallmatrix} +0.13 \\ -0.13 \end{smallmatrix}$	18.51	1.03 $\begin{smallmatrix} +0.20 \\ -0.20 \end{smallmatrix}$
4.25	0.50 $\begin{smallmatrix} +0.11 \\ -0.11 \end{smallmatrix}$	18.04	0.93 $\begin{smallmatrix} +0.19 \\ -0.19 \end{smallmatrix}$
4.50	0.48 $\begin{smallmatrix} +0.09 \\ -0.09 \end{smallmatrix}$	17.56	0.85 $\begin{smallmatrix} +0.17 \\ -0.18 \end{smallmatrix}$
4.75	0.46 $\begin{smallmatrix} +0.08 \\ -0.08 \end{smallmatrix}$	17.09	0.78 $\begin{smallmatrix} +0.16 \\ -0.16 \end{smallmatrix}$
5.00	0.45 $\begin{smallmatrix} +0.07 \\ -0.07 \end{smallmatrix}$	16.62	0.71 $\begin{smallmatrix} +0.15 \\ -0.15 \end{smallmatrix}$

Tabela 3.3: Densidade numérica em volume comóvel na cosmologia EdS para os dados do CNOC2 usando o modelo de evolução completo proposto em L99 para os dados tipos morfológicos: recentes ($v=1$), intermediárias ($v=2$) e antigas ($v=3$).

z	$[\rho]_{obs}$ ($\times 10^9 \mathcal{M}_{\odot} \text{Mpc}^{-3}$)	$[\rho]_{obs}^1$ ($\times 10^9 \mathcal{M}_{\odot} \text{Mpc}^{-3}$)	$[\rho]_{obs}^2$ ($\times 10^9 \mathcal{M}_{\odot} \text{Mpc}^{-3}$)	$[\rho]_{obs}^3$ ($\times 10^9 \mathcal{M}_{\odot} \text{Mpc}^{-3}$)
0.05	1.5692 ± 0.0038	0.7577 ± 0.0013	0.3445 ± 0.0008	0.2380 ± 0.0009
0.12	1.8146 ± 0.0104	0.7986 ± 0.0031	0.3742 ± 0.0022	0.3354 ± 0.0029
0.25	1.9565 ± 0.0287	0.7360 ± 0.0063	0.4011 ± 0.0055	0.4400 ± 0.0095
0.40	2.1871 ± 0.0673	0.6689 ± 0.0098	0.4326 ± 0.0111	0.5949 ± 0.0261
0.55	2.5220 ± 0.1435	0.6101 ± 0.0135	0.4655 ± 0.0195	0.8024 ± 0.0624
0.75	3.1931 ± 0.3784	0.5432 ± 0.0186	0.5122 ± 0.0376	1.1968 ± 0.1818
0.90	3.9330 ± 0.7842	0.5000 ± 0.0231	0.5497 ± 0.0600	1.6199 ± 0.3954
1.00	4.5762 ± 1.2855	0.4743 ± 0.0267	0.5758 ± 0.0818	1.9838 ± 0.6634

para os dados de G04 e aqueles publicados originalmente em RS03 para o CNOC2, deve-se mudar ambas as quantidades para o volume comóvel. Lembrando que,

$$\frac{V_{Pr}}{V_C} = S^3, \quad (3.17)$$

e que,

$$\frac{dN}{dz}\Big|_C = \frac{dN}{dz}\Big|_{Pr} \frac{V_{Pr}}{V_C}, \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{dN}{dz}\Big|_C \right]_{obs} = \left[\frac{dN}{dz}\Big|_{Pr} \right]_{obs} \frac{V_{Pr}}{V_C}, \quad (3.18)$$

onde a expressão teórica com o índice Pr é dada pela equação (3.7) e sua equivalente observacional resulta da equação (3.4). Com isso finalmente obtém-se a expressão para a densidade relativística por fonte teórica em termos do volume comóvel, como segue,

$$\mu_C = \frac{S^3 \mathcal{M}_g}{(d_A)^2 d\Omega} \frac{dN}{dz}\Big|_{Pr} = \frac{\mathcal{M}_g}{(d_A)^2 d\Omega} \frac{dN}{dz}\Big|_C = \mathcal{M}_g (1+z) n_C \frac{dy}{dz} = S^3 \mu. \quad (3.19)$$

A sua expressão observacional correspondente, também em volume comóvel, se escreve,

$$[\mu_C]_{obs} = J(z) \mu_C = \frac{S^3 \mathcal{M}_g}{(d_A)^2 d\Omega} \left[\frac{dN}{dz}\Big|_C \right]_{obs}. \quad (3.20)$$

Os gráficos que exibem a evolução com o desvio para o vermelho dessas duas grandezas em volume comóvel estão dados nas figuras 3.1, 3.2 e 3.3.

Na figura 3.1 pode-se perceber que a aparente consistência obtida em RS03 para esse segundo teste ao se comparar a curva teórica para o modelo EdS com os dados daquele trabalho, que desconsiderava a evolução de ϕ^* , não se preserva quando a evolução desse parâmetro é considerada.

Na figura 3.2 compara-se o comportamento da densidade relativística por fonte com o modelo de evolução completo para cada tipo espectral considerado nos dados de L99 com aquele previsto pela teoria para o modelo EdS. Tal comparação deve ser feita com cuidado nesse caso, pois a massa estelar média \mathcal{M}_g na equação (2.52) assume um valor diferente para cada tipo espectral, como discutido na seção §1.2.1, fazendo assim que cada tipo espectral tenha uma curva teórica distinta a ser comparada. No entanto, como μ é proporcional a \mathcal{M}_g tais curvas são idênticas a menos de uma constante bastando representar uma delas para a comparação visual feita nesse teste.

Por fim, na figura 3.3 exhibe-se o comportamento da densidade relativística por fonte observacional obtida dos dados de G04 e compara-se ao comportamento esperado para o modelo com métrica FLRW assumido nesses dados. Pode-se observar que embora os pontos observacionais acompanhem a curva teórica eles tendem a se afastar cada vez mais dela com o desvio para o vermelho. Tal comportamento parece concordar com o das galáxias de mesmo tipo espectral no catálogo de L99 ($v=1$).

Conclui-se que outra grandeza observacional obtida a partir da contagem extraída

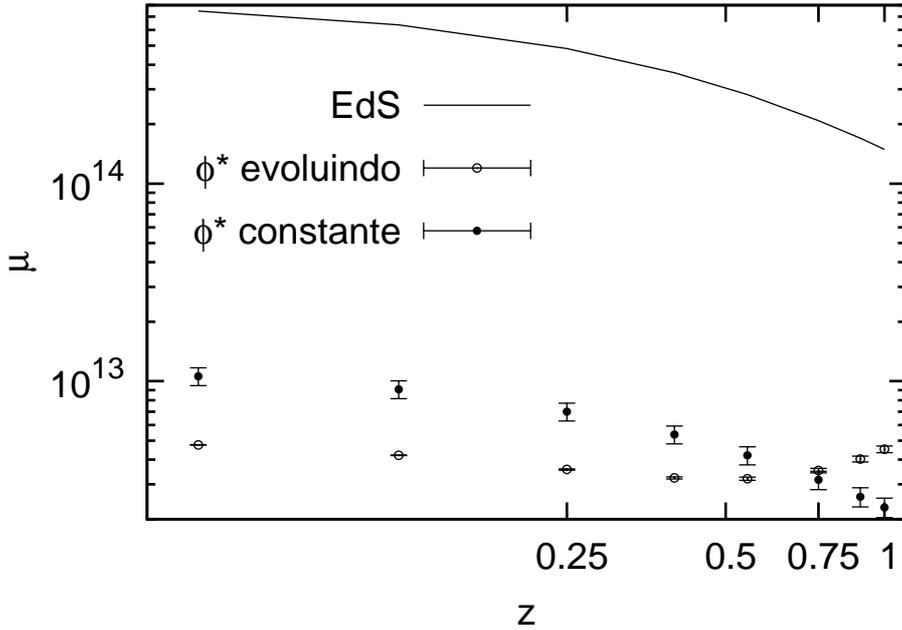


Figura 3.1: Densidade relativística por fonte, em $\mathcal{M}_\odot \text{ Mpc}^{-2}$, para os dados de todos os tipos espectrais observados no CNOC2, na parametrização com ϕ^* constante usada em RS03, naquela que considera por completo o modelo de evolução da FL proposto em L99 e no modelo de Einstein-de Sitter com $h=1$. Mais uma vez fica claro que a evolução de ϕ^* não pode ser desconsiderada.

das FL estudadas parece comportar-se de maneira inconsistente com seus valores teóricos previstos. Os resultados desses dois primeiros testes motivaram o estudo da evolução com o desvio para o vermelho da própria função de completeza $J(z)$ como uma nova forma de olhar para o problema da consistência entre teoria e observação a cerca da contagem de galáxias. A comparação entre os valores observados e os teóricos para as contagens diferenciais $[dN/dz]_{obs}$ e dN/dz presente nas tabelas 3.1 e 3.2 e exibida nas figuras 3.4, 3.5 e 3.6 torna ainda mais clara tal motivação, já que a relação entre a primeira e a segunda é dada diretamente pela função de completeza, segundo a equação (3.4).

3.4 Estudo da função de completeza

Retornando para a definição da função de completeza dada na equação (3.1) e especializando a discussão para a evolução com o desvio para o vermelho de grandezas construídas a partir da FL, é fácil perceber que *idealmente* $J(z)$ deveria assumir valor constante e unitário para que os valores previstos para uma dada grandeza $T(z)$ fossem iguais aos respectivos valores medidos $[T(z)]_{obs}$, em qualquer desvio para o vermelho. Por outro lado, um comportamento distinto dessa função explicita o nosso grau de ignorância acerca do fenômeno, ou em outras palavras, os erros sistemáticos que possam estar sendo cometidos. Por exemplo, enquanto não conseguirmos incluir a matéria escura em nos-

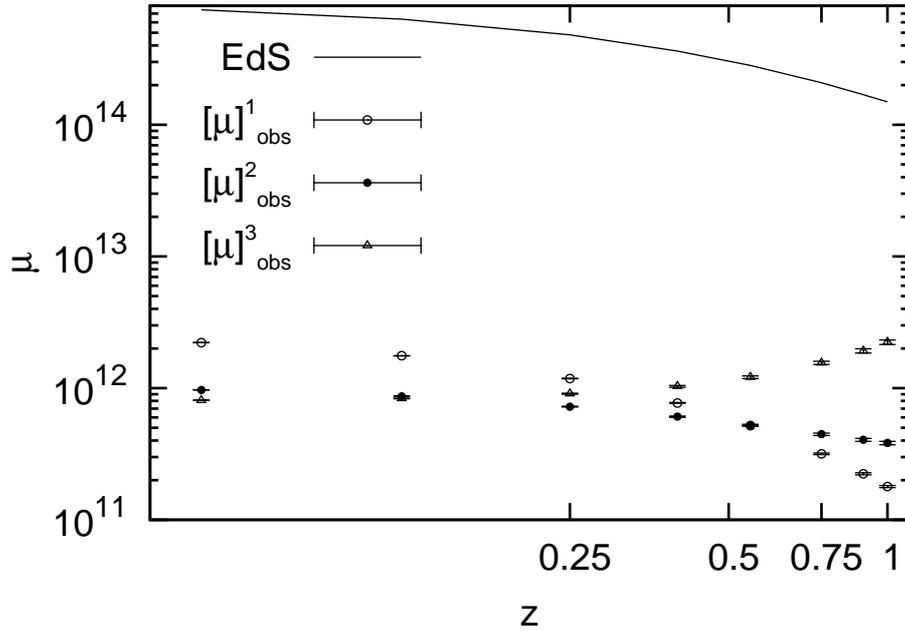


Figura 3.2: Densidade relativística por fonte, em $\mathcal{M}_\odot \text{ Mpc}^{-2}$, para os dados dos diferentes tipos espectrais observados no CNOC2: anteriores ($v=1$), intermediárias ($v=2$) e posteriores ($v=3$) e para o modelo de Einstein-de Sitter com $h=1$. O comportamento nitidamente distinto dessa grandeza para os diferentes tipos de galáxias aponta a dificuldade em conectar teoria e prática da FL: qualquer incompletude do catálogo pode viesar as medidas de densidades feitas a partir dele.

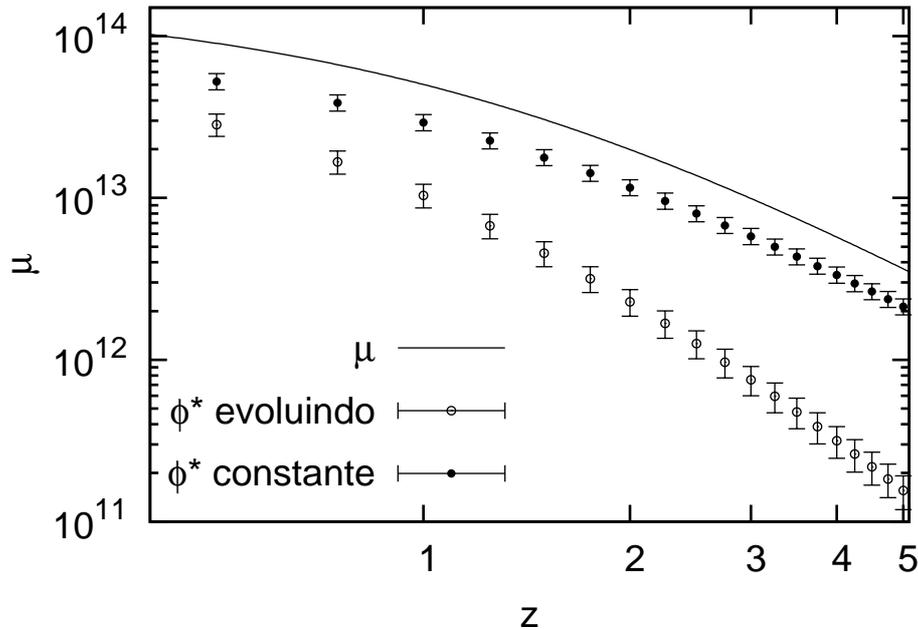


Figura 3.3: Densidade relativística por fonte, em $\mathcal{M}_\odot \text{ Mpc}^{-2}$, para o catálogo de G04 de galáxias azuis observadas no levantamento FDF e para o modelo com métrica FLRW, $\Omega_{m_0} = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$ e $h = 0.7$. Pode-se notar que a evolução dessa grandeza não só está fortemente ligada ao parâmetro ϕ^* , como observado na figura 3.1, como também continua afastando-se da curva teoria para $z > 1$.

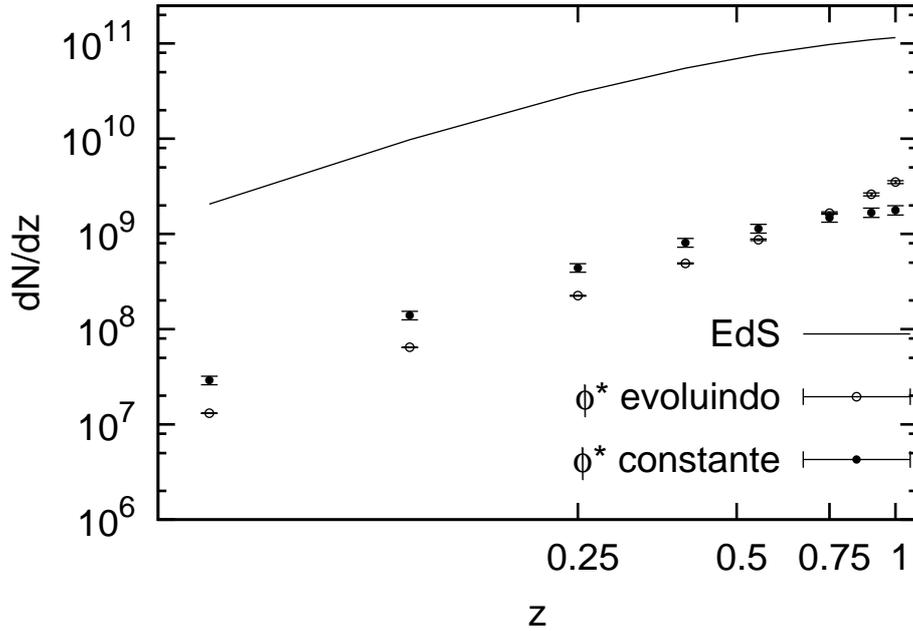


Figura 3.4: Evolução com o desvio para o vermelho da contagem diferencial para os dados do CNOC2. O comportamento dessa grandeza calculado segundo RS03 mantendo ϕ^* constante apresenta razoável consistência com a curva teórica para o modelo de Einstein-de Sitter, o que indica que os efeitos astrofísicos afetando a contagem possam estar fortemente ligados a evolução do parâmetro ϕ^* .

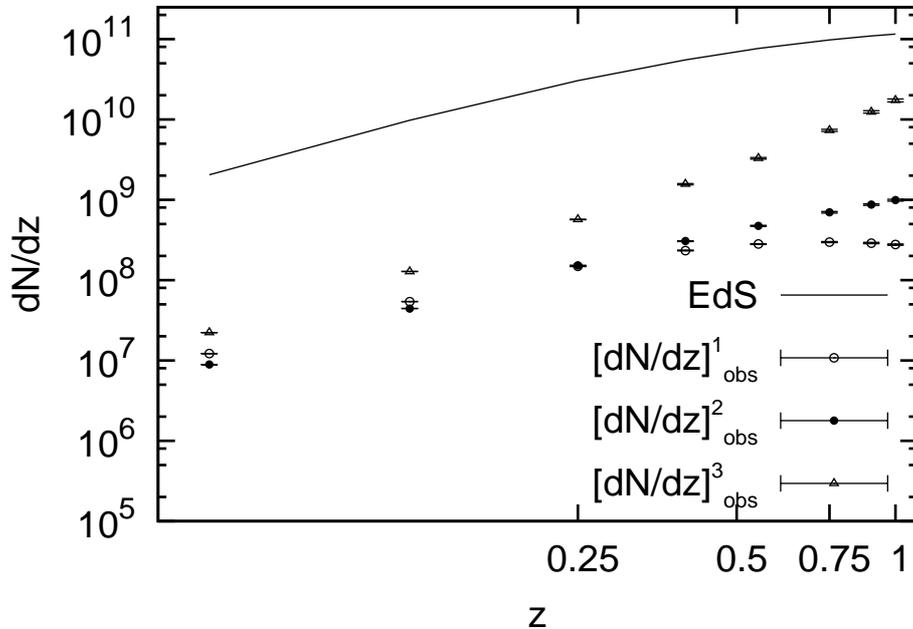


Figura 3.5: Evolução com o desvio para o vermelho da contagem diferencial dos três tipos espectrais classificados em CNOC2, usando o modelo de evolução completo proposto por seus autores: anteriores ($v=1$), intermediárias ($v=2$) e posteriores ($v=3$). Numa análise puramente visual, as galáxias classificadas como intermediárias no catálogo parecem ter sua contagem diferencial se comportando de maneira mais consistente com a curva teórica. Tal situação é confirmada numericamente em §3.5.

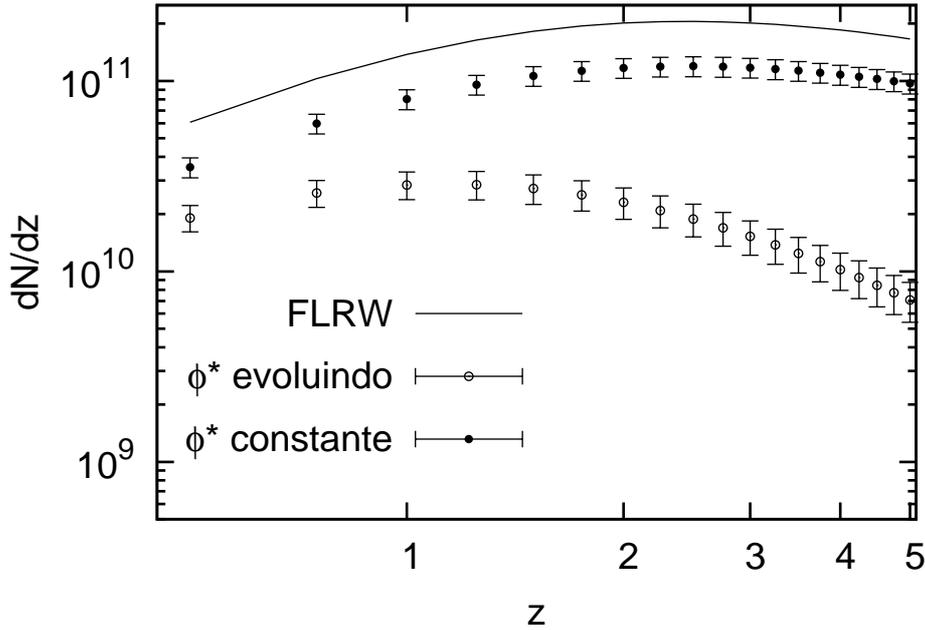


Figura 3.6: Evolução com o desvio para o vermelho da contagem diferencial das galáxias azuis do levantamento FDF. É claro pelo gráfico o comportamento inconsistente de $[dN/dz]_{obs}$ quando comparado com seus valores teóricos dN/dz , especialmente para $z \gtrsim 1$. Os dados calculados mantendo o parâmetro ϕ^* constante são incluídos para ilustrar melhor o indício de que tal parâmetro parece ser determinante na evolução da contagem observada no catálogo.

Em todos os modelos, a função de completude para a contagem de galáxias nunca será unitária e constante pois haverá sempre uma grande discrepância entre a matéria luminosa que se espera observar e a que de fato se estará observando. Ao se falar em consistência ideal, está-se meramente apontando uma direção na qual buscar incluir refinamentos na teoria ou na observação. O comportamento da função de completude descreve simplesmente o quanto as observações se afastam da teoria com o desvio para o vermelho, o quanto ainda se pode melhorar a descrição do comportamento dessa dada grandeza $T(z)$.

Os dados com pontos abertos na figura 3.7 exibem a evolução da $J(z)$ específica para a FL de G04. Como a equação (3.12) é simplesmente a aplicação da equação geral (3.1) para o cálculo de $[dN/dz]_{obs}$, todas as grandezas observacionais relacionadas à contagem diferencial terão seu comportamento afetado pela evolução da função de completude. Portanto, a inconsistência observada nos dois primeiros testes tem origem na obtenção dos valores observacionais via equação (3.1) fato esse que fica melhor explicitado na própria função de completude envolvida nesses cálculos.

De acordo com a equação (3.3) fica claro que o comportamento observado na figura 3.7 indica que a variação da contagem cumulativa de galáxias $[dN]_{obs}$ torna-se gradativamente menor com o desvio para o vermelho. Como as funções usadas por G04 para descrever a evolução da FL com o desvio para o vermelho são arbitrarias, pode-se imediatamente perguntar se a fonte da inconsistência apontada aqui não poderia ser o modelo de evolução da FL. Se for assumido que a relação com o desvio para o vermelho de $J(z)$ se deve prin-

principalmente à evolução de sua normalização $\phi^*(z)$, pode-se facilmente calcular a função de completeza correspondente à função de seleção onde tal normalização é constante, bastando reescrever a equação (1.18) com $B_W = 0$. Isso efetivamente muda a parametrização de $\phi^*(z)$ usada em G04 para uma função constante, ou seja, $\phi^*(z) = \phi_0^*$ para todos os filtros de forma similar ao tratamento original de RS03 para o catálogo CNOC2. Os dados com pontos cheios na figura 3.7 poderiam ingenuamente levar a afirmar que tal suposição é verdadeira, visto que a nova função de completeza tem um comportamento constante, com uma discreta diminuição residual dentro das incertezas, e portanto mais consistente. No entanto, é preciso lembrar que forçar $B_W = 0$ é um processo artificial e viesado, uma vez que tal modelo certamente não ajusta tão bem os dados de G04 quanto os valores originais publicados pelos autores. Não se pode afirmar que, forçando constante o parâmetro de normalização ϕ^* e ajustando a evolução dos outros dois parâmetros de Schechter aos dados observados, tal inconsistência não persistiria. Além disso, as curvas de confiança para o ajuste dos parâmetros A_W e B_W em G04 excluem em 2σ o valor de zero para o B_W de qualquer filtro W . Tudo que se pode dizer então é que, dado o modelo de evolução com o desvio para o vermelho da FL usado pelos autores, a inconsistência entre teoria e observação é devida principalmente à evolução da própria normalização $\phi^*(z)$ da FL, o que concorda com as evidências que já vinham sendo coletadas e discutidas nas seções anteriores. Tal conclusão é reforçada pela figura 3.5 em que se compara o comportamento da função de completeza para os dados de L99 tratados em RS03 com aqueles usando o modelo evolutivo completo obtidos aqui. No entanto, vale perguntar se um modelo diferente para a evolução da contagem observada, mantendo a normalização ϕ^* constante, não seria capaz de ajustar igualmente bem os dados de G04 de forma menos inconsistente com o modelo cosmológico suposto pelos autores. O teste de consistência aqui delineado poderia ser usado nessa comparação entre diferentes modelos de evolução. Alternativamente, diferentes tipos de perfis para a FL como aqueles discutidos em Bell *et al.* (2003), Blanton *et al.* (2005) e Lorenzo (2008), podem ser testados e comparados usando esse formalismo da função de completeza.

Adicionalmente às observações acima, comparando as funções de completeza obtidas da função de seleção de G04 e de L99 com o modelo evolutivo completo percebe-se uma diferença funcional em sua dependência com o desvio para o vermelho. Essa diferença foi o que primeiro motivou o estudo detalhado das FL de L99, levando em conta a classificação morfológica. Como o catálogo de L99 não selecionou nenhum tipo morfológico, observando todo tipo de galáxias e classificando-as em três grandes grupos, seria razoável perguntar não estar aí a diferença no comportamento das $J(z)$ desses catálogos, dado que em G04 apenas galáxias azuis foram selecionadas.

De fato, pelo distinto comportamento funcional da função de completeza para cada tipo morfológico no gráfico da figura 3.9 pode-se notar que a distribuição radial de cada tipo apresenta uma consistência distinta com o que é previsto pelo modelo cosmológico,

o que permite concluir que a evolução na contagem desses objetos depende sensivelmente de sua morfologia.

A figura 3.10 compara os dados para a consistência interna – função de seleção comparada à densidade comóvel no mesmo modelo cosmológico usado pela FL – de ambos os catálogos, no intervalo em desvios para o vermelho comum a ambas as amostras. Antes porém, vale discutir uma maneira de quantificar de forma simples a evolução com o desvio para o vermelho de uma função de completeza, o que permitiria fazer uma comparação numérica entre os resultados para dois diferentes catálogos desse novo teste de consistência.

3.5 O fator E

Pode-se pensar inicialmente numa quantidade que meça o quanto a função de completeza de um determinado catálogo se afasta de seu valor médio em determinado intervalo de desvio para o vermelho, por unidade de desvio para o vermelho. Assim, define-se o fator E como,

$$E = \frac{\int_{\Delta z} \left| 1 - \frac{J(z)}{\langle J \rangle} \right| dz}{\Delta z}, \quad (3.21)$$

onde o valor médio $\langle J \rangle$ no intervalo Δz é dado por,

$$\langle J \rangle = \frac{\int_{\Delta z} J(z) dz}{\Delta z}. \quad (3.22)$$

Como está definido, o fator E quantifica o quanto as contagens de um catálogo se afastam de seus valores teóricos, dado por $J(z)$, em relação à média dessas contagens, por unidade de desvio para o vermelho, podendo portanto ser usado na comparação entre catálogos com diferentes alcances. Em outras palavras, expressa em termos relativos o quanto a densidade numérica observada afaste de seu valor médio no intervalo em z considerado. Por ser um valor relativo à própria média, o fator E também permite comparar catálogos cujas funções de completeza difiram em muitas ordens de grandeza. Dentro da discussão feita sobre o uso da função de completeza no estudo da consistência entre a contagem observada e a teoria relativística para as contagens, quanto menor o fator E de um dado catálogo, menos pronunciada é a evolução com o desvio para o vermelho de sua contagem. Isso permite então quantificar a inconsistência de um determinado catálogo, e comparar tais resultados entre diferentes catálogos ou diferentes parâmetros, como modelo cosmológico ou perfil analítico para a FL utilizados.

A exemplo do que foi feito na seção §3.2, pode-se calcular a integral em (3.21) interpolando uma função polinomial aos valores de $J(z)$. Os resultados para o fator E das diferentes funções de completeza estudadas aqui são apresentados na tabela 3.4.

3.6 Modelo empírico

Como discutido anteriormente, existem alguns efeitos astrofísicos que podem afetar a densidade numérica observada de galáxias. Baseado nos resultados para as funções de completudeza da seção anterior, pode-se propor um modelo puramente empírico para a evolução com o desvio para o vermelho da densidade numérica em volume comóvel $n_C^v(z)$ de cada tipo espectral v . Como tal, o objetivo não é descrever detalhadamente como cada efeito astrofísico afeta a contagem, mas simplesmente obter qual o comportamento de $n_C^v(z)$ que recuperaria a consistência ideal com as observações dos catálogos estudados. Em outras palavras, qual a forma funcional para a densidade numérica em volume comóvel que faz com que a FL para cada tipo espectral estudado produza uma função de completudeza constante. De acordo com a equação (3.9), para o caso em questão $n_C(z)$ deveria ser escrita como

$$n_C^v(z) \propto \sum_w C_w \psi_w^v(z), \quad (3.23)$$

onde C_w são constantes. Essa proporcionalidade entre a densidade numérica $n_C^v(z)$ e a função de seleção $\psi^v(z)$ só pode ser considerada verdadeira supondo que a densidade de matéria escura no universo seja constante em todos os desvios para o vermelho. A densidade numérica deveria então ser proporcional às funções de completudeza $J(z)$ exibidas na seção anterior. Portanto, a evolução de $n_C^v(z)$ seria então bem descrita por uma função exponencial:

$$n_C^v(z) \propto e^{z/\zeta^v}, \quad (3.24)$$

com os valores ajustados de ζ^v aos dados da função de completudeza para cada tipo espectral dados na tabela 3.4. Pode-se notar que os valores para o tipo morfológico comum a ambos os catálogos, concorda dentro de suas incertezas o que reforça a idéia dos efeitos cosmológicos na contagem dependerem da tipologia da galáxia. Usando as equações (2.8), (2.10) e (2.75) pode-se então escrever um modelo empírico similar para a evolução da massa estelar média em volume comóvel como segue,

$$\mathcal{M}_v(z) = \frac{\rho_{m_0}}{n_C^v(z)} \propto e^{-z/\zeta^v}. \quad (3.25)$$

Voltando portanto à discussão da seção §2.2, agora pode-se questionar a validade da suposição *a priori* feita nesse trabalho de que os processos astrofísicos que influenciam a medida da massa de uma galáxia não são estatisticamente relevantes na escala cosmológica e que, portanto, a massa estelar média pode ser tomada como constante. A fonte da inconsistência observada pode justamente ser essa suposição. Se for esse mesmo o caso, isso implica afirmar que tais efeitos astrofísicos se somam de forma coerente em grandes escalas e de maneiras distintas para as diferentes classes morfológicas estudadas.

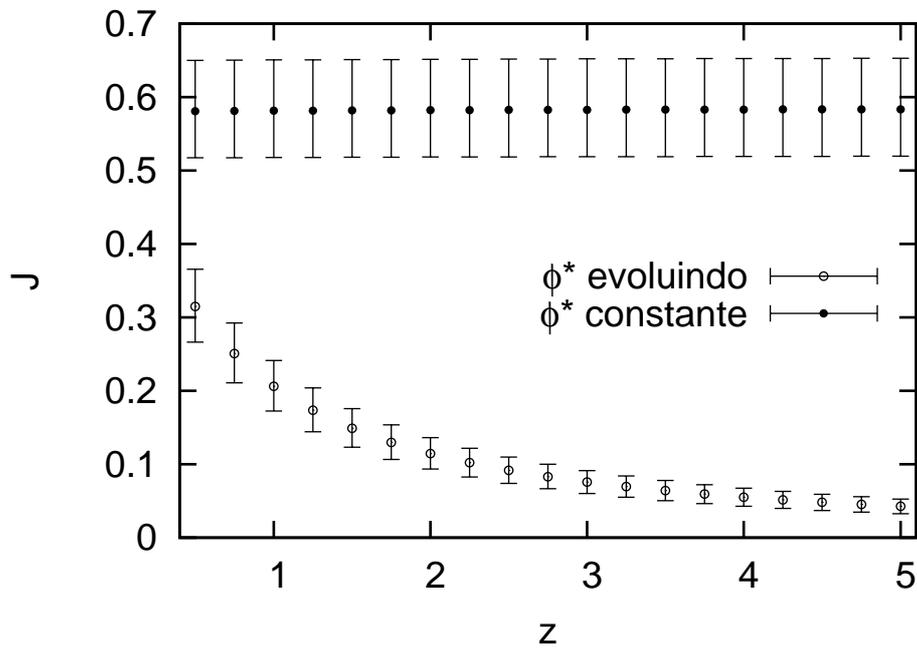


Figura 3.7: Função de completude para dados do catálogo de galáxias azuis de G04 no levantamento FDF. Esse gráfico explicita a vantagem do estudo dessa grandeza na discussão da inconsistência entre a contagem obtida da FL de um catálogo e seu valor esperado pela teoria relativística. Nitidamente há uma perda sistemática de galáxias azuis com o desvio para o vermelho em relação ao que se esperaria obter pela teoria. Na seção §3.5 tal inconsistência é quantificada, através de um fator que determina o afastamento do comportamento constante da função de completude. Os dados calculados mantendo o parâmetro ϕ^* constante são adicionados para explicitar o fato de grande parte da evolução da contagem estar codificada nesse parâmetro.

Tabela 3.4: Ajustes para a densidade numérica em volume comóvel e fatores E

Classe	ζ	fator E
Anteriores (FDF)	-1.41 ± 0.79	0.49
Anteriores (CNOC2)	-1.0320 ± 0.0005	0.22
Intermediárias	1.3715 ± 0.0005	0.17
Posteriores	0.3592 ± 0.0002	0.60

Tabela 3.5: Função de completudeza para dados do levantamento CNOC2

z	$J(z)^{RS03}$ ($\times 10^{-4}$)	$J(z)$ ($\times 10^{-4}$)	$J(z)^1$ ($\times 10^{-4}$)	$J(z)^2$ ($\times 10^{-4}$)	$J(z)^3$ ($\times 10^{-4}$)
0.05	141.72 ± 0.15	12.98 ± 0.02	29.68 ± 0.03	12.98 ± 0.02	10.83 ± 0.02
0.12	142.98 ± 0.15	13.65 ± 0.05	27.75 ± 0.07	13.65 ± 0.05	13.12 ± 0.06
0.25	145.12 ± 0.15	14.98 ± 0.11	24.50 ± 0.12	14.98 ± 0.11	18.76 ± 0.19
0.40	147.36 ± 0.15	16.68 ± 0.19	21.23 ± 0.17	16.68 ± 0.19	28.37 ± 0.45
0.55	149.35 ± 0.16	18.58 ± 0.29	18.40 ± 0.20	18.58 ± 0.29	42.94 ± 0.93
0.75	151.76 ± 0.16	21.45 ± 0.46	15.21 ± 0.23	21.45 ± 0.46	74.73 ± 2.22
0.90	153.21 ± 0.17	23.90 ± 0.61	13.19 ± 0.24	23.90 ± 0.61	113.35 ± 4.05
1.00	154.02 ± 0.17	25.69 ± 0.73	12.00 ± 0.24	25.69 ± 0.73	149.70 ± 5.95

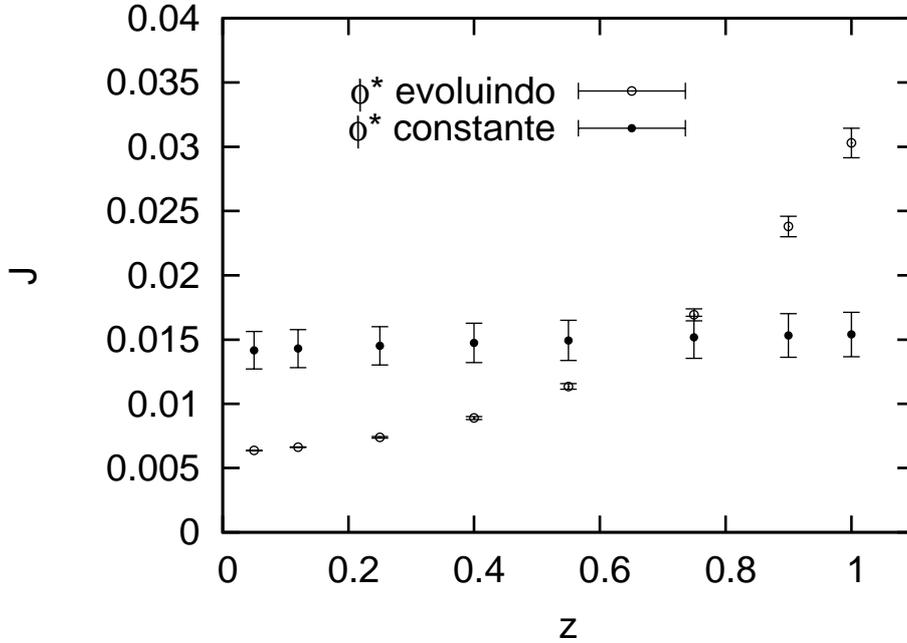


Figura 3.8: Função de completudeza para dados de todas as galáxias no catálogo de L99 baseado no levantamento CNOC2, na parametrização com ϕ^* constante usada em RS03 e levando em consideração o modelo de evolução da FL completo proposto em L99. Aqui fica ainda mais explícita a dependência com o parâmetro ϕ^* da evolução da densidade numérica e portanto da inconsistência entre os dados desse catálogo e a teoria para as contagens.

Tabela 3.6: Função de completiza para dados do levantamento FDF

z	$J(\phi^*$ evoluindo)		$J(\phi^*$ constante)	
0.50	0.32	+0.04 -0.04	0.58	+0.07 -0.06
0.75	0.25	+0.03 -0.03	0.58	+0.07 -0.06
1.00	0.21	+0.03 -0.03	0.58	+0.07 -0.06
1.25	0.17	+0.03 -0.02	0.58	+0.07 -0.06
1.50	0.15	+0.02 -0.02	0.58	+0.07 -0.06
1.75	0.13	+0.02 -0.02	0.58	+0.07 -0.06
2.00	0.12	+0.02 -0.02	0.58	+0.07 -0.06
2.25	0.10	+0.02 -0.02	0.58	+0.07 -0.06
2.50	0.09	+0.02 -0.02	0.58	+0.07 -0.06
2.75	0.08	+0.01 -0.01	0.58	+0.07 -0.06
3.00	0.08	+0.01 -0.01	0.58	+0.07 -0.06
3.25	0.07	+0.01 -0.01	0.58	+0.07 -0.06
3.50	0.06	+0.01 -0.01	0.58	+0.07 -0.06
3.75	0.06	+0.01 -0.01	0.58	+0.07 -0.06
4.00	0.06	+0.01 -0.01	0.58	+0.07 -0.06
4.25	0.05	+0.01 -0.01	0.58	+0.07 -0.06
4.50	0.05	+0.01 -0.01	0.58	+0.07 -0.06
4.75	0.05	+0.01 -0.01	0.58	+0.07 -0.06
5.00	0.04	+0.01 -0.01	0.58	+0.07 -0.06

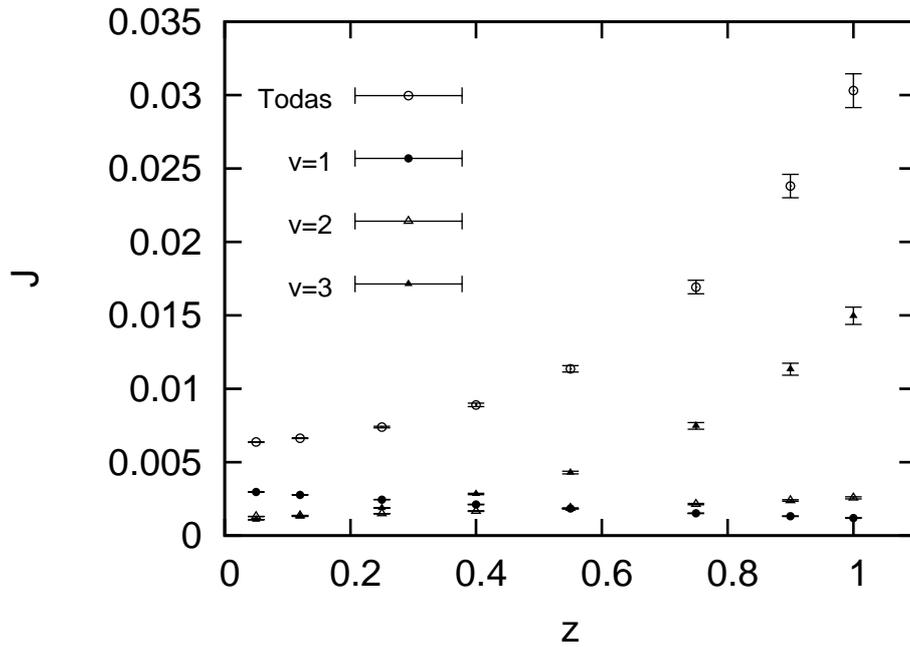


Figura 3.9: Função de completude por tipo espectral para dados do levantamento CNOC2. As galáxias nesse catálogo foram divididas em três tipos: anteriores ($v=1$), intermediárias ($v=2$) e recentes ($v=3$). Pode-se ver que a distribuição de galáxias antigas domina o comportamento da distribuição total nos desvios para o vermelho mais altos. Isso, em parte, se deve à proporção P_v das galáxias observadas no catálogo.

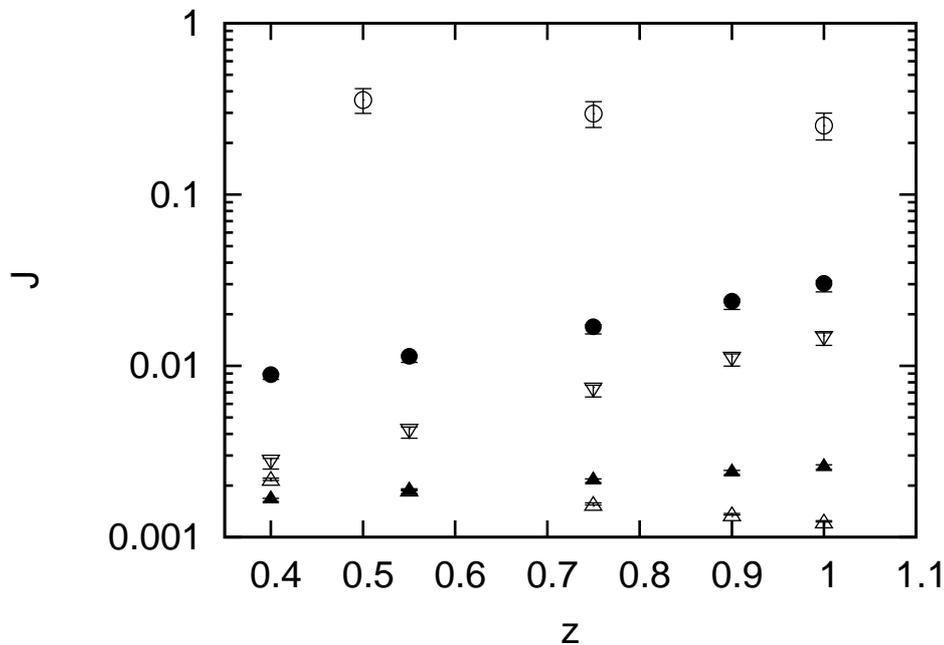


Figura 3.10: Comparação entre as funções de completude calculadas, no intervalo de desvio para o vermelho comum aos dois catálogos. Legenda – FDF: círculo aberto. CNOC2 (Todas): círculo cheio. CNOC2 (Anteriores): triângulo invertido. CNOC2 (Intermediárias): triângulo cheio. CNOC2 (Posteriores): triângulo aberto. É razoável afirmar que todas as funções de completude estudadas nesse trabalho podem ser bem ajustadas por exponenciais dentro do intervalo de desvio para o vermelho estudado.

Capítulo 4

Estatísticas radiais

Nesse capítulo será discutido como obter densidades relativísticas de galáxias a partir da função de luminosidade, bem como a importância de se considerar tais densidades quando se quer estudar a distribuição de galáxias em desvios para o vermelho altos. Será também discutido como as densidades diferenciais γ_i e diferenciais integrais γ_i^* , definidas em §2.7 são afetadas pela definição da distância i utilizada e quais as consequências dessa dependência com a definição de distância no contexto da discussão sobre a homogeneidade da distribuição de matéria no Universo.

A observação de objetos celestes é feita através da detecção de fótons advindos daqueles corpos. Dentro da estrutura da Relatividade Geral, os fótons têm suas trajetórias determinadas pelas geodésicas nulas da variedade. Em outras palavras, toda a informação a respeito do Universo que chega ao observador se propagou até ele por uma hipersuperfície dessa variedade cujo vetor tangente tem norma nula, o cone de luz passado do observador. Esse é um ponto fundamental em Relatividade Geral, Cosmologia e Astronomia: embora o Universo seja modelado usando uma métrica espacialmente homogênea, não somos capazes de acessar essa hipersuperfície de tempo cósmico constante em que a homogeneidade é definida, a não ser localmente. Portanto, ao se estudar, por exemplo, modelos analíticos ou numéricos de formação hierárquica de galáxias avançados no tempo cósmico, se está na verdade olhando como essas galáxias se distribuem espacialmente a cada instante. Mas não é isso que se observa quando se aponta o telescópio para o céu e se conta galáxias daqui até desvios para o vermelho da ordem de 5. O que se observa é como as galáxias se distribuem no cone de luz passado. Portanto, para se compreender de forma completa a distribuição de galáxias no Universo é preciso levar em consideração não só que elas se formam de maneira hierárquica, que elas evoluem e que elas se fundem mas também os efeitos relativísticos de geodésicas nulas sobre as contagens observadas. Tais efeitos, puramente geométricos, são muito importantes em escalas de $z \approx 5$, como pode ser visto nas figuras 2.3 e 2.4: para a métrica do modelo FLRW, testada de forma independente e consistente por meio de outros observáveis, é esperado que a densidade de objetos cosmológicos no cone de luz passado de um observador nessa variedade decresça

de uma a duas ordens de grandeza, apenas por efeito geométrico, em outras palavras, por estar se considerando contagens numa geometria não-euclidiana.

O programa completo de estudo da distribuição profunda de galáxias deveria portanto incluir o uso de modelos analíticos ou numéricos para a formação hierárquica de galáxias, como o clássico modelo semi-analítico proposto por Press & Schechter (1974) ou a mais recente simulação numérica de N-corpos, a *Millenium Simulation* (Springel *et al.* 2005), convoluídos a um modelo para a evolução da taxa de formação estelar, que pode afetar a luminosidade da galáxia e, portanto, a estimativa de sua massa. A resposta de interesse dessa convolução seria a variação com o desvio para o vermelho da massa estelar média $\mathcal{M}_g(z)$, como discutido na §2.2, e o uso dessa resposta no cálculo da densidade numérica comóvel n_c . Tal densidade poderia então ser usada na determinação da função de completudeza $J(z)$, equação (3.2), e no posterior estudo da consistência da FL e também no cálculo da contagem diferencial dN/dz , equação (2.51), usada na determinação das densidades diferenciais γ_i e diferenciais integrais γ_i^* , explicitamente através das equações (2.62) e (2.64). Nesse trabalho optou-se por continuar os esforços iniciados em RS03, Ribeiro (2005) e A07 no sentido de obter as densidades acima citadas a partir da FL galáctica, estendendo a discussão iniciada nesses trabalhos a um intervalo de desvios para o vermelho cinco vezes maior, onde os efeitos geométricos discutidos anteriormente são ainda mais relevantes.

Para interpretar o significado de γ_i e γ_i^* é interessante voltar à discussão sobre homogeneidade da introdução. Muitas vezes, quando se fala na possível homogeneidade na distribuição de galáxias no contexto da Cosmologia Observacional, refere-se a constância de alguma densidade média calculada com dados observacionais derivados de um catálogo de desvios para o vermelho de galáxias. Portanto, homogeneidade observacional implicaria em valores constantes para as densidades diferenciais γ_i e diferenciais integrais γ_i^* .

Como uma das maneiras mais triviais de observar galáxias é através de contagens, é razoável assumir que a homogeneidade observacional é atingida quando a densidade numérica média observada $[n]_{obs}$ torna-se constante a medida que se faz a média sobre volumes cada vez maiores ao longo do cone de luz passado. Portanto,

$$[n]_{obs} = \frac{[N]_{obs}}{[V]_{obs}} = cte., \quad (4.1)$$

onde $[N]_{obs}$ é o número de galáxias observado dentro de um certo volume $[V]_{obs}$. Tal definição de densidade observacional implica que ambos $[N]_{obs}$ e $[V]_{obs}$ sejam obtidos ao longo do cone de luz passado. Portanto, a equação (4.1) não é aplicável a hipersuperfícies de tempo constante.

Na prática, o cálculo de $[n]_{obs}$ por meio da equação (4.1) encontra alguns problemas, como o da multiplicidade na definição do volume observacional $[V]_{obs}$, que advém do fato de não se poder ainda traduzir o desvio para o vermelho observado numa medida de distância

de forma independente de um modelo cosmológico. É preciso então escolher uma dentre algumas possibilidades de definições de distâncias cosmológicas, observar $[N]_{obs}$ e então calcular $[n]_{obs}$. Dessa forma, embora a homogeneidade espacial possa ser univocamente definida, o mesmo não ocorre com a homogeneidade observada.

Nessa parte do trabalho são discutidos o comportamento observacional, em ambos os catálogos estudados, de duas densidades numéricas definidas no capítulo 2, a densidade numérica diferencial γ e a densidade numérica diferencial integral γ^* . É com vistas a essa discussão que foi escolhido o catálogo de G04 para os dados do FDF, pois sua profundidade e número de objetos mesmo nos intervalos de desvio para o vermelho mais altos parecem ideais para estudar possíveis desvios da homogeneidade observada em grandes escalas.

Por outro lado, é interessante usar dados de galáxias cujas contagens sejam minimamente afetadas pelos efeitos astrofísicos discutidos no capítulo 3. Tal discussão já foi iniciada em A07 para os dados da FL de L99 como calculados em RS03. Como discutido no capítulo 3, embora a parametrização ali usada seja a que melhor remove a inconsistência das contagens com a teoria relativística, tais parâmetros não correspondem ao modelo de evolução completo proposto pelos autores do catálogo e é excluído pelos níveis de confiança por eles apresentado. Levando em consideração a evolução completa dos parâmetros proposta em L99, três opções parecem mais óbvias: a primeira é usar os dados referentes à função de seleção completa do catálogo ψ ; a segunda seria usar os dados referentes às galáxias de tipo anterior, mesmo tipo morfológico das catalogadas em G04 ou a terceira, que seria usar os dados referentes às galáxias classificadas por L99 como intermediárias, por apresentarem a função de seleção mais constante, como pode ser visto na figura 3.10 e confirmado na tabela 3.4 e, portanto, usar os dados mais consistentes com a teoria aqui empregada, do ponto de vista das contagens. Após a discussão em §3.5, parece claro que para o catálogo de L99, feito levando em consideração galáxias de diferentes tipos morfológicos, considerar a função de seleção ψ completa é inconsistente, pois a contagem de cada tipo espectral parece ser afetada de uma maneira diferente pelos diversos efeitos astrofísicos envolvidos. Os dados referentes às galáxias recentes poderiam ser comparados aos obtidos usando o catálogo de G04, mas tal comparação já foi feita, e de maneira mais clara do que seria feito aqui, no capítulo 3. Portanto, escolheu-se finalmente usar os dados de G04 por sua profundidade e os das galáxias intermediárias de L99 por sua melhor consistência entre a contagem e a teoria.

Os valores observacionais para a contagem diferencial $[dN/dz]_{obs}$ dados na tabela 3.2 para os dados de G04 e na tabela 3.1 para os dados de L99 permitem calcular os correspondentes valores observados para as densidades diferenciais $[\gamma]_{obs}$ usando as diferentes definições observacionais de distâncias cosmológicas, bastando substituir dN/dz por $[dN/dz]_{obs}$ na equação (2.64). Pode-se então obter os valores observados para as densidades diferenciais integrais $[\gamma]_{obs}^*$ por meio da equação (2.62), ou (2.74), porque, por definição, $[N]_{obs} = V_C \psi(z)$.

Tabela 4.1: Densidade diferenciais observacionais para os dados das galáxias intermediárias no catálogo de L99 para o levantamento CNOC2, em unidades de 10^{-4} Mpc^{-3} .

z	$[\gamma_A]_{obs}$	$[\gamma_G]_{obs}$	$[\gamma_L]_{obs}$	$[\gamma_z]_{obs}$
0.05	6.529 \pm 0.009	5.368 \pm 0.008	4.424 \pm 0.006	5.127 \pm 0.007
0.12	8.913 \pm 0.030	5.644 \pm 0.019	3.618 \pm 0.012	5.039 \pm 0.017
0.25	15.384 \pm 0.110	6.194 \pm 0.044	2.613 \pm 0.019	4.843 \pm 0.035
0.40	27.809 \pm 0.317	6.898 \pm 0.079	1.905 \pm 0.022	4.584 \pm 0.052
0.55	49.008 \pm 0.769	7.682 \pm 0.121	1.457 \pm 0.023	4.316 \pm 0.068
0.75	102.659 \pm 2.198	8.871 \pm 0.190	1.077 \pm 0.023	3.971 \pm 0.085
0.90	179.887 \pm 4.624	9.884 \pm 0.254	0.888 \pm 0.023	3.735 \pm 0.096
1.00	264.839 \pm 7.566	10.623 \pm 0.304	0.791 \pm 0.023	3.591 \pm 0.103

Tabela 4.2: Densidade diferenciais integrais observacionais para os dados das galáxias intermediárias no catálogo de L99 para o levantamento CNOC2, em unidades de 10^{-4} Mpc^{-3} .

z	$[\gamma_A^*]_{obs}$	$[\gamma_G^*]_{obs}$	$[\gamma_L^*]_{obs}$	$[\gamma_z^*]_{obs}$
0.05	6.140 \pm 0.013	5.304 \pm 0.012	4.582 \pm 0.010	5.125 \pm 0.011
0.12	7.758 \pm 0.042	5.522 \pm 0.030	3.930 \pm 0.021	5.077 \pm 0.027
0.25	11.561 \pm 0.140	5.916 \pm 0.071	3.029 \pm 0.037	4.939 \pm 0.060
0.40	17.564 \pm 0.372	6.401 \pm 0.136	2.333 \pm 0.049	4.755 \pm 0.101
0.55	25.760 \pm 0.833	6.917 \pm 0.224	1.858 \pm 0.060	4.559 \pm 0.147
0.75	41.049 \pm 2.123	7.659 \pm 0.396	1.429 \pm 0.074	4.295 \pm 0.222
0.90	56.645 \pm 4.014	8.258 \pm 0.585	1.204 \pm 0.085	4.105 \pm 0.291
1.00	69.428 \pm 6.013	8.679 \pm 0.752	1.085 \pm 0.094	3.984 \pm 0.345

Lembrando que a função de completeza e dN/dz independem do volume e do modelo cosmológico, como discutido na seção §3.1, uma vez conhecida a contagem diferencial $[dN/dz]_{obs}$ para um dado catálogo, pode-se escolher a definição de volume e o modelo cosmológico que se irá usar na construção das densidades diferenciais obtidas a partir dessas contagens. Para tornar as grandezas calculadas nesse trabalho comparáveis àquelas apresentadas em A07, serão usadas as definições de distância dadas pelas equações (2.35), (2.58), (2.59) e (2.60) no modelo cosmológico de métrica FLRW e parâmetros $\Omega_{m_0} = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$ e $h = 0.7$, para as densidades observacionais em *ambos os modelos*. Tal modelo concorda com o do volume usado em G04, embora não seja necessário, e é suficientemente próximo daquele que é melhor aceito no momento.

Usando as equações (2.64) e (2.74), foram montados os gráficos das densidades diferenciais γ_i e densidades diferenciais integrais γ_i^* para os dados referentes às galáxias intermediárias de L99 nas tabelas 4.1 e 4.2 e nas figuras 4.1 e 4.2 respectivamente e nas tabelas 4.3 e 4.4 e nas figuras 4.3 e 4.4 para os dados de G04.

Tabela 4.3: Densidade diferenciais observacionais para os dados das galáxias azuis do catálogo de G04 para o levantamento FDF, em unidades de 10^{-4} Mpc^{-3} .

z	$[\gamma_A]_{obs}$		$[\gamma_G]_{obs}$		$[\gamma_L]_{obs}$		$[\gamma_z]_{obs}$	
0.50	8060.3	+1360.1 -1306.3	1469.4	+247.9 -238.1	314.4	+53.1 -51.0	873.4	+147.4 -141.6
0.75	14165.6	+2489.0 -2401.7	1224.1	+215.1 -207.5	148.6	+26.1 -25.2	547.9	+96.3 -92.9
1.00	26055.2	+4756.8 -4610.3	1045.1	+190.8 -184.9	77.8	+14.2 -13.8	353.2	+64.5 -62.5
1.25	55980.7	+10593.5 -10309.4	909.2	+172.1 -167.4	44.0	+8.3 -8.1	234.2	+44.3 -43.1
1.50	232419.8	+45480.2 -44426.8	802.9	+157.1 -153.5	26.4	+5.2 -5.0	159.6	+31.2 -30.5
1.75	-204760.8	+41340.9 -40520.9	717.6	+144.9 -142.0	16.6	+3.4 -3.3	111.6	+22.5 -22.1
2.00	-89248.7	+18553.7 -18241.9	647.7	+134.7 -132.4	10.9	+2.3 -2.2	79.9	+16.6 -16.3
2.25	-64150.8	+13706.3 -13513.8	589.6	+126.0 -124.2	7.4	+1.6 -1.6	58.4	+12.5 -12.3
2.50	-53676.6	+11766.9 -11631.2	540.5	+118.5 -117.1	5.2	+1.1 -1.1	43.5	+9.5 -9.4
2.75	-48252.3	+10836.6 -10736.5	498.5	+112.0 -110.9	3.7	+0.8 -0.8	32.9	+7.4 -7.3
3.00	-45169.1	+10377.9 -10304.0	462.3	+106.2 -105.5	2.7	+0.6 -0.6	25.4	+5.8 -5.8
3.25	-43364.7	+10180.1 -10127.4	430.7	+101.1 -100.6	2.0	+0.5 -0.5	19.8	+4.6 -4.6
3.50	-42337.3	+10143.7 -10109.3	402.9	+96.5 -96.2	1.5	+0.4 -0.4	15.6	+3.7 -3.7
3.75	-41819.1	+10215.2 -10197.5	378.3	+92.4 -92.3	1.2	+0.3 -0.3	12.5	+3.1 -3.0
4.00	-41653.6	+10363.6 -10361.7	356.4	+88.7 -88.7	0.9	+0.2 -0.2	10.1	+2.5 -2.5
4.25	-41744.2	+10569.7 -10582.8	336.8	+85.3 -85.4	0.7	+0.2 -0.2	8.2	+2.1 -2.1
4.50	-42026.6	+10820.5 -10848.4	319.1	+82.2 -82.4	0.6	+0.2 -0.2	6.8	+1.7 -1.8
4.75	-42457.6	+11107.4 -11149.9	303.0	+79.3 -79.6	0.5	+0.1 -0.1	5.6	+1.5 -1.5
5.00	-43006.4	+11424.2 -11481.3	288.5	+76.6 -77.0	0.4	+0.1 -0.1	4.7	+1.2 -1.3

Tabela 4.4: Densidade diferenciais integrais observacionais para os dados das galáxias azuis do catálogo de G04 para o levantamento FDF, em unidades de 10^{-4} Mpc $^{-3}$. As incertezas em torno de $z \approx 2.5$ não foram determinadas pois a incerteza propagada quadraticamente torna-se muito grande naquela região (vide apêndice B).

z	$[\gamma_A^*]_{obs}$		$[\gamma_G^*]_{obs}$		$[\gamma_L^*]_{obs}$		$[\gamma_z^*]_{obs}$	
0.50	11238.6	+1604.2 -1537.3	3330.0	+475.3 -455.5	986.6	+140.8 -135.0	2284.5	+326.1 -312.5
0.75	11009.2	+2528.2 -2435.3	2054.2	+471.7 -454.4	383.3	+88.0 -84.8	1152.0	+264.5 -254.8
1.00	12834.3	+3954.6 -3827.6	1604.3	+494.3 -478.5	200.5	+61.8 -59.8	736.5	+226.9 -219.6
1.25	15552.4	+6215.2 -6042.1	1365.4	+545.6 -530.4	119.9	+47.9 -46.6	516.0	+206.2 -200.5
1.50	18914.2	+9988.3 -9748.7	1210.5	+639.2 -623.9	77.5	+40.9 -39.9	379.4	+200.4 -195.6
1.75	22850.9	+16917.5 -16570.8	1098.8	+813.5 -796.8	52.8	+39.1 -38.3	288.1	+213.3 -208.9
2.00	27347.2	—	1012.9	—	37.5	—	224.0	—
2.25	32406.2	—	944.0	—	27.5	—	177.6	—
2.50	38040.1	—	887.2	—	20.7	—	143.1	—
2.75	44265.0	—	839.4	—	15.9	—	116.9	—
3.00	51098.4	—	798.4	—	12.5	—	96.6	—
3.25	58559.2	+42170.5 -41946.9	762.8	+549.3 -546.4	9.9	+7.2 -7.1	80.8	+58.2 -57.9
3.50	66667.0	+36949.3 -36821.3	731.6	+405.5 -404.0	8.0	+4.4 -4.4	68.2	+37.8 -37.7
3.75	75441.5	+34078.1 -34017.9	703.9	+318.0 -317.4	6.6	+3.0 -3.0	58.0	+26.2 -26.1
4.00	84902.0	+32427.8 -32421.6	679.2	+259.4 -259.4	5.4	+2.1 -2.1	49.8	+19.0 -19.0
4.25	95069.7	+31496.7 -31536.7	657.0	+217.7 -217.9	4.5	+1.5 -1.5	43.0	+14.3 -14.3
4.50	105963.1	+31027.7 -31109.4	636.9	+186.5 -187.0	3.8	+1.1 -1.1	37.4	+11.0 -11.0
4.75	117603.1	+30875.6 -30996.0	618.6	+162.4 -163.0	3.2	+0.9 -0.9	32.8	+8.6 -8.6
5.00	130008.0	+30951.8 -31109.4	601.9	+143.3 -144.0	2.8	+0.6 -0.7	28.8	+6.9 -6.9

Tabela 4.5: Distâncias observacionais, em Mpc, para o modelo Λ CDM com métrica FLRW, $\Omega_{m_0} = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$ e $h = 0.7$, nos desvios para o vermelho usados nas análises das densidades radiais de ambos os catálogos usados nesse trabalho: L99 e G04.

z	d_A	d_G	d_L	d_z
0.05	202	212	222	214
0.12	446	500	560	514
0.25	807	1008	1260	1071
0.40	1108	1552	2172	1713
0.50	1259	1889	2834	2141
0.55	1323	2050	3177	2356
0.75	1514	2649	4635	3212
0.90	1607	3053	5802	3855
1.00	1652	3304	6608	4283
1.25	1720	3870	8708	5353
1.50	1746	4364	10910	6424
1.75	1744	4797	13191	7499
2.00	1727	5180	15540	8566
2.25	1699	5521	17944	9636
2.50	1665	5828	20396	10707
2.75	1628	6104	22891	11778
3.00	1589	6356	25423	12848
3.25	1549	6585	27988	13919
3.50	1510	6796	30583	14990
3.75	1472	6990	33205	16060
4.00	1434	7170	35852	17131
4.25	1398	7337	38522	18202
4.50	1362	7493	41213	19272
4.75	1328	7639	43923	20343
5.00	1296	7775	46652	21414

Pode-se observar a nítida dependência com a definição de distância de ambas as densidades estudadas em ambos os catálogos. É interessante notar que mesmo no contexto do modelo FLRW, que é obtido supondo o princípio cosmológico, pode-se obter inhomogeneidades observadas dependendo da distância utilizada. Mais ainda, fica claro por esses gráficos que tais modelos FLRW melhor satisfarão ambos os tipos de homogeneidade apenas se for usada a distância por área galáctica, que pode-se mostrar ser equivalente à distância comóvel. Portanto, ao se discutir homogeneidade observacional, a definição de distância é fundamental.

A inconsistência discutida no capítulo anterior parece apenas agravar o problema da homogeneidade observacional, uma vez que nem mesmo as densidades calculadas usando a distância por área galáctica tiveram valores observados mantidos constantes. Em outras palavras, para os dados de G04 não há homogeneidade observacional, qualquer que seja a definição de distância utilizada e mesmo para os dados melhor comportados, no ponto de vista das contagens, das galáxias classificadas como intermediárias em L99, tal homogeneidade observacional não é encontrada.

Por fim, as figuras 4.5 e 4.6, construídas usando os dados nas tabelas 4.1, 4.2 e 4.5 e as figuras 4.7 e 4.8, construídas usando os dados nas tabelas 4.3, 4.4 e 4.5, demonstram um padrão de lei de potência no comportamento de $[\gamma_L^*]_{obs}$ e $[\gamma_z^*]_{obs}$, assim como em $[\gamma_L]_{obs}$ e $[\gamma_z]_{obs}$, especialmente a altos desvios para o vermelho, o que concorda com a visão fractal, ao menos para a distribuição de galáxias. Com efeito, fica claro que não há nenhuma dificuldade em se discutir inhomogeneidade observacional dentro de modelos que preservem o princípio cosmológico. Esse efeito de lei de potência é menos pronunciado do que aqueles observados na análise do catálogo CNOC2 estudado em A07, e muito menos ainda do que aqueles observados nas figuras 4.5 e 4.6 para a distribuição de galáxias intermediárias no CNOC2 e pode indicar que a inconsistência discutida anteriormente possa estar distorcendo tal padrão no comportamento de ambas, $[\gamma_L]_{obs}$ e $[\gamma_z]_{obs}$, especialmente em altos desvios para o vermelho.

O estudo da função de completeza para os dados das galáxias intermediárias no CNOC2 feito nesse trabalho parece indicar que a afirmação acima procede, já que pode-se perceber que a inconsistência desses dados, por evoluir mais linearmente com o desvio para o vermelho, altera menos o comportamento de lei de potência das densidades que consideram d_z , pois essa distância é proporcional ao desvio para o vermelho. Como d_L não varia linearmente com z , um desvio linear em z das contagens acaba alterando de maneira mais pronunciada a inclinação da lei de potência que descreve o comportamento das densidades definidas em termos de tal distância. Talvez por isso a inclinação obtida para os dados das galáxias intermediárias no CNOC2 usando d_z seja diferente daquela obtida para os mesmos dados usando d_L . Além disso, como era de se esperar pela discussão do capítulo anterior, o grau de inhomogeneidade da distribuição de galáxias também depende do tipo morfológico considerado.

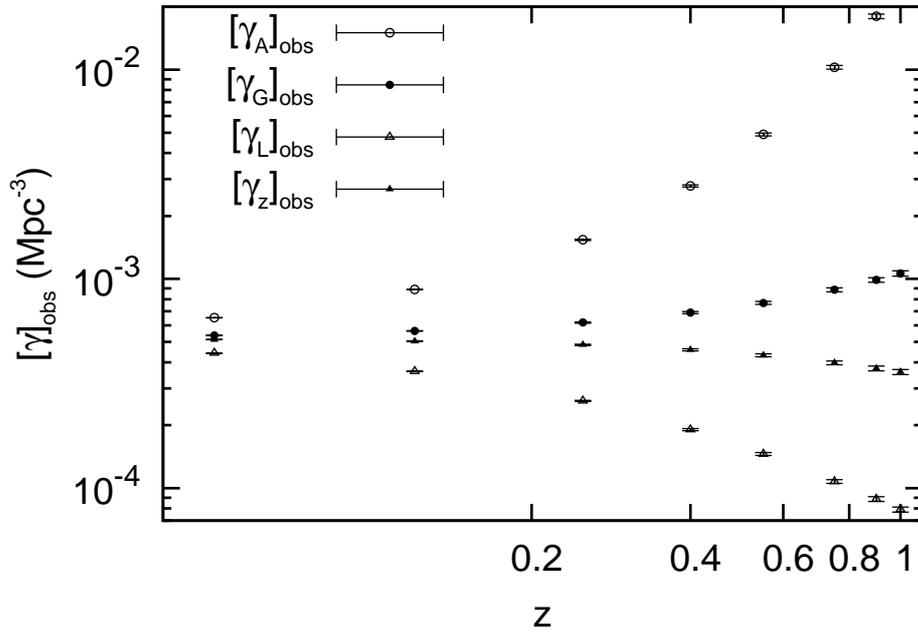


Figura 4.1: Densidade diferenciais observacionais para as galáxias de tipo espectral intermediário no levantamento CNOC2. Mesmo usando o tipo espectral menos afetado por efeitos astrofísicos que alterem a contagem cosmológica, como discutido em §3.5, percebe-se que a evolução na contagem dessas galáxias afasta as densidades diferenciais observadas de seu comportamento teórico no modelo estudado, dado na figura 2.3 e impede afirmar que haja homogeneidade espacial, mesmo para a distância por área galáctica d_G .

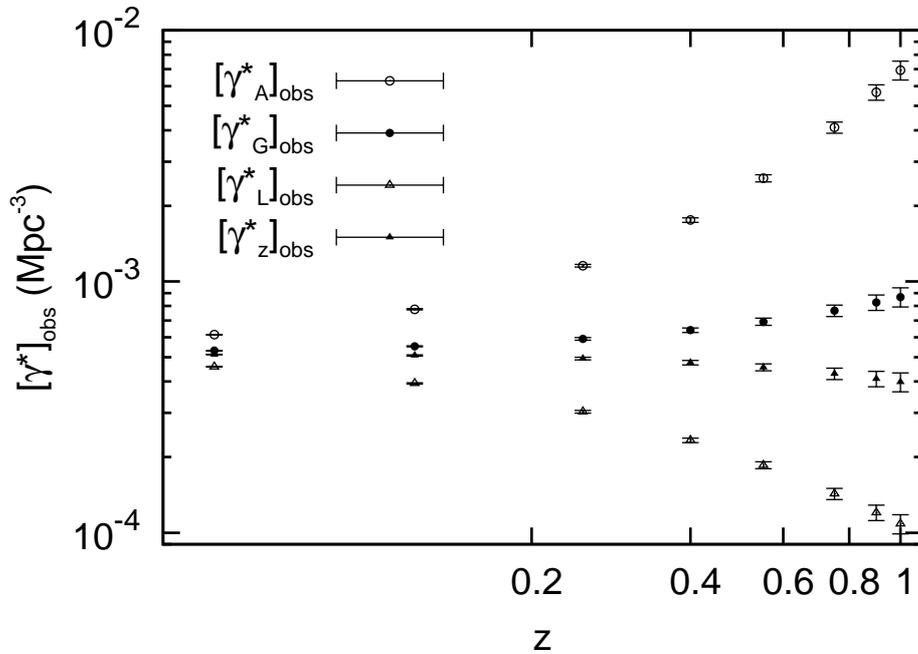


Figura 4.2: Densidade diferenciais integrais observacionais para as galáxias de tipo espectral intermediário no levantamento CNOC2. Aqui também pode-se perceber que a evolução na contagem afasta as densidades observadas de seu comportamento teórico no modelo estudado, dado na figura 2.4.

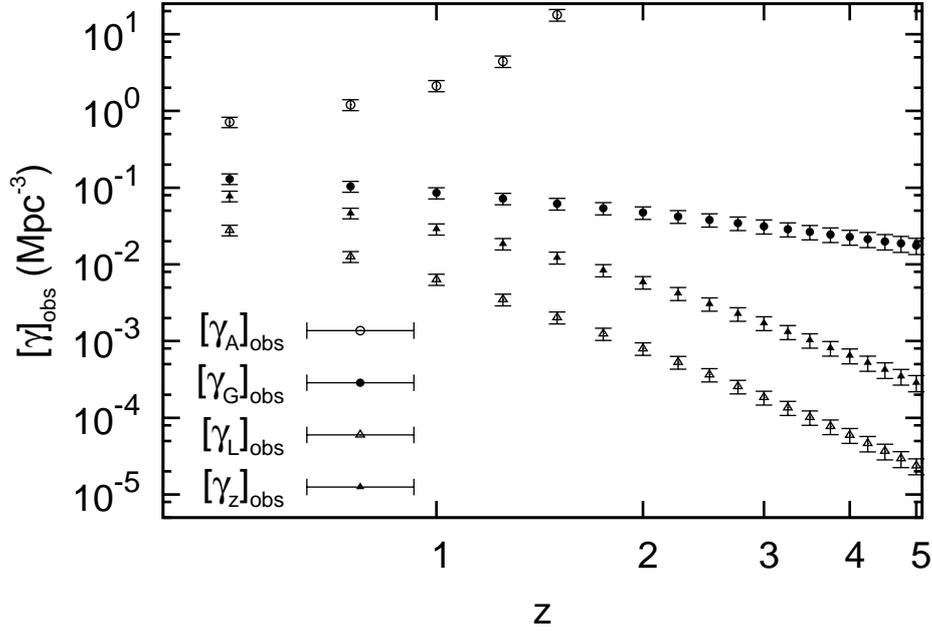


Figura 4.3: Densidades diferenciais observacionais para as galáxias azuis (recentes) no levantamento FDF. Aqui novamente a evolução da função de completiza afeta o comportamento dessas grandezas observacionais, o que pode ser mais facilmente verificado nos valores de $[\gamma_G]_{obs}$ em comparação ao seu comportamento teórico dado na figura 2.3.

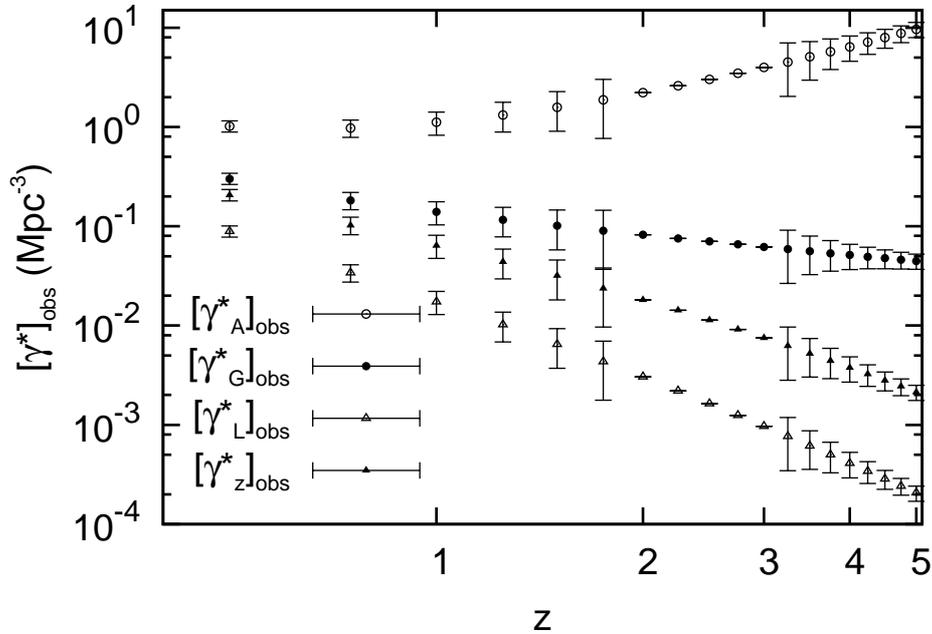


Figura 4.4: Densidades diferenciais integrais para as galáxias azuis (recentes) no levantamento FDF. As incertezas foram propagadas quadraticamente. Como discutido no apêndice B, o erro de $[\gamma^*]_{obs}$ tem a função d^2N/dz^2 em seu denominador e esta possui um zero em $z \approx 2.5$, fazendo com que as incertezas cresçam muito em torno dessa singularidade. Por essa razão, tais incertezas foram removidas desse gráfico.

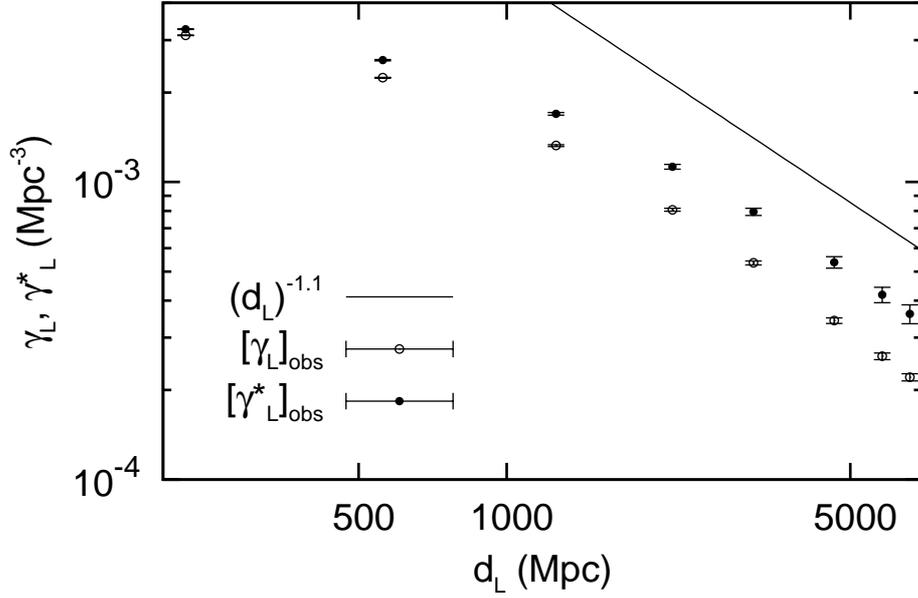


Figura 4.5: Densidade diferencial e densidade diferencial integral pela distância por luminosidade para as galáxias de tipo espectral intermediário no levantamento CNOC2. Pode-se notar um padrão de lei de potência no comportamento dos pontos mais profundos de ambas $[\gamma_L^*]_{\text{obs}}$ e $[\gamma_L]_{\text{obs}}$. A linha reta foi colocada como referência.

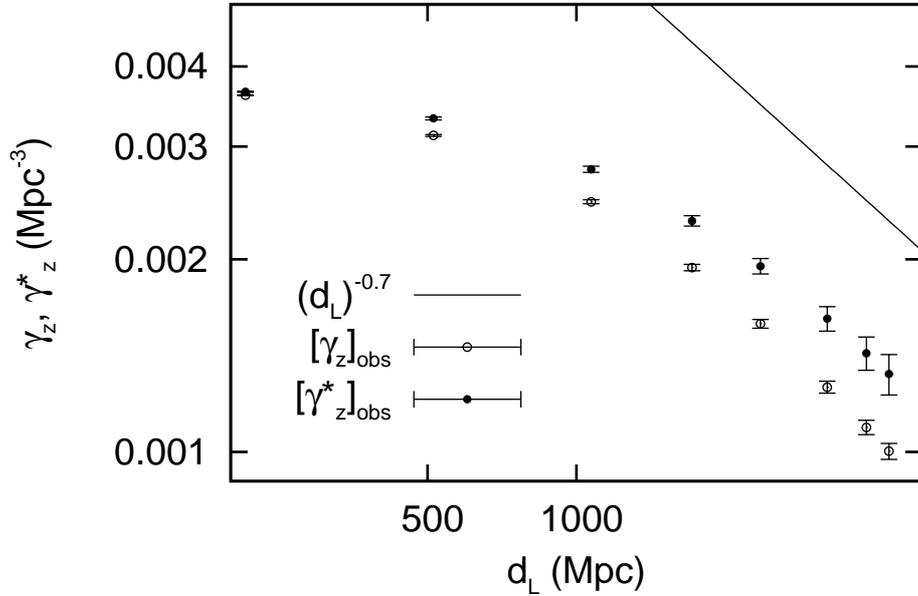


Figura 4.6: Densidade diferencial e densidade diferencial integral pela distância por desvio para o vermelho para as galáxias de tipo espectral intermediário no levantamento CNOC2. Pode-se notar um padrão de lei de potência no comportamento dos pontos mais profundos de ambas $[\gamma_z^*]_{\text{obs}}$ e $[\gamma_z]_{\text{obs}}$. A linha reta foi colocada como referência.

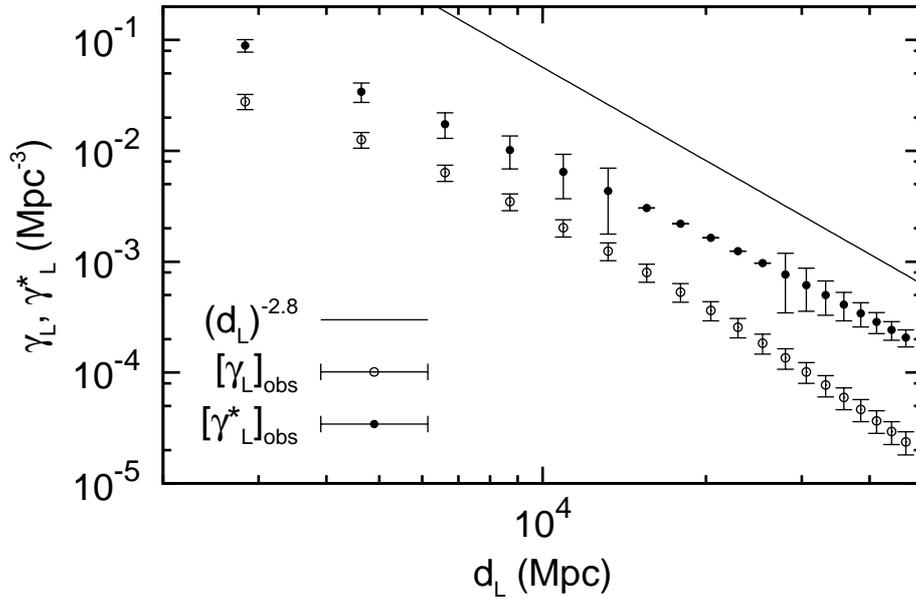


Figura 4.7: Densidade diferencial e densidade diferencial integral pela distância por luminosidade para as galáxias azuis (recentes) no levantamento FDF. Pode-se notar um padrão de lei de potência no comportamento dos pontos mais profundos de ambas $[\gamma_L^*]_{\text{obs}}$ e $[\gamma_L]_{\text{obs}}$. A linha reta foi colocada como referência. As incertezas no intervalo $2.0 < z < 3.0$ foram removidas, segundo a discussão no apêndice B.

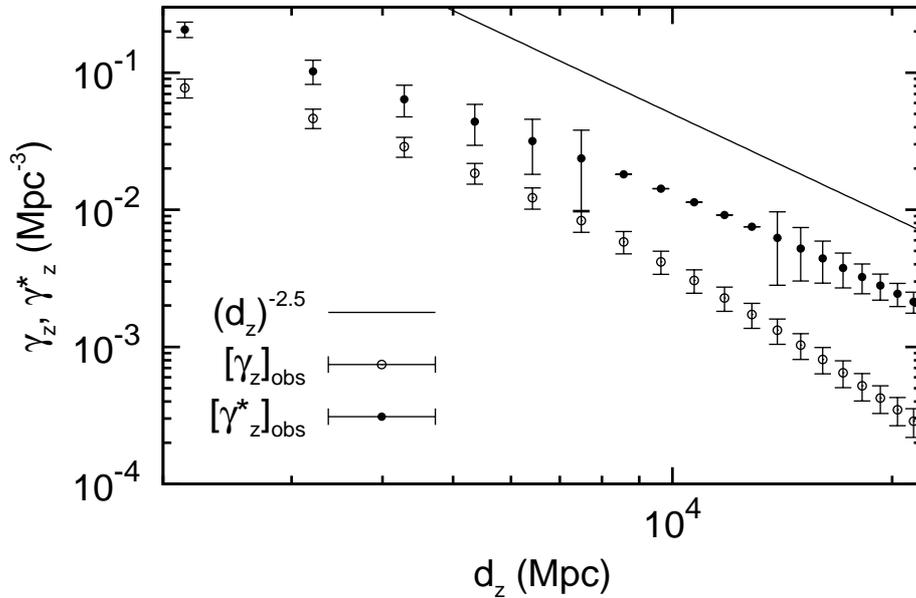


Figura 4.8: Densidade diferencial e densidade diferencial integral pela distância por desvio para o vermelho para as galáxias azuis (recentes) no levantamento FDF. Pode-se notar um padrão de lei de potência no comportamento dos pontos mais profundos de ambas $[\gamma_z^*]_{\text{obs}}$ e $[\gamma_z]_{\text{obs}}$. A linha reta foi colocada como referência. As incertezas no intervalo $2.0 < z < 3.0$ foram removidas, segundo a discussão no apêndice B.

Conclusões

Nesse trabalho discutiu-se como calcular funções de seleção específicas para uma dada FL ajustada por um perfil de Schechter que evolui com o desvio para o vermelho. Apresentou-se tais funções para os dados de Lin *et al.* (1999; L99), observados no intervalo de desvios para o vermelho entre $0.12 \leq z \leq 1.00$, levando em consideração o modelo completo de evolução proposto pelos autores, e calculou-se essas mesmas funções para os dados de Gabasch *et al.* (2004; G04) observados no intervalo de desvios para o vermelho entre $0.5 \leq z \leq 5.0$. Discutiu-se também como extrair desses dados a contagem diferencial observada dN/dz , um observável primário, que independe do modelo cosmológico e obteve-se essa quantidade para ambos os catálogos. A obtenção de todos esses dados, específicos desses dois catálogos, é uma contribuição original desse trabalho.

Estudou-se também o modelo que conecta a teoria relativística para a contagem de fontes cosmológicas com os dados observacionais extraídos da função de luminosidade de galáxias (FL) proposto em Ribeiro & Stoeger (2003; RS03) e expandiu-se tal discussão para o modelo cosmológico com métrica de FLRW e parâmetros $\Omega_m=0.3$ e $\Omega_\Lambda=0.7$ e constante de Hubble $H_0 = 70 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$, propondo-se equações para uma abordagem numérica geral utilizada para calcular as diversas grandezas teóricas envolvidas. Tal abordagem encontra-se resumida no apêndice C, e é também uma contribuição original desse trabalho.

Desenvolveu-se então como esse arcabouço a conectar teoria e observação pode ser utilizado para conduzir testes de consistência que usam funções de seleção e aplicou-se tais testes aos dados obtidos nesse trabalho. O primeiro teste consiste numa comparação entre as densidades locais observada e teórica e o segundo é uma análise da evolução com o desvio para o vermelho da densidade relativística por fonte. Os resultados sugeriram um novo teste de consistência usando a função de completudeza $J(z)$, que relaciona as contagens observadas com seus valores previstos pela teoria. Foi mostrado que a evolução com o desvio para o vermelho dessa grandeza representa a evolução da própria inconsistência entre o modelo e as observações e argumentou-se que tal teste permite visualizar de maneira mais clara a consistência entre modelo e observação. O uso da função de completudeza para o fim de teste de consistência também é contribuição original desse trabalho, assim como o posterior desenvolvimento da definição e uso do fator E na comparação quantitativa da consistência entre os dados de dois catálogos com a teoria aqui desenvolvida.

Argumentou-se ainda que a consistência ideal entre a cosmologia adotada e os dados da FL deveria ocorrer quando a função de completeza se tornasse constante. Os resultados para os dados de G04, no entanto, indicam um claro decréscimo de $J(z)$ em altos desvios para o vermelho, o que sugere que a suposição de massa estelar média constante pode rapidamente perder sua validade para esses dados. A possibilidade de uma inconsistência entre as contagens observadas e suas previsões teóricas já havia sido notada em Albani *et al.* (2007; A07) para o catálogo de galáxias CNOC2 de Lin *et al.* (1999), mas este era limitado a $z \sim 1$. Nesse trabalho calculou-se a função de completeza também para esse catálogo como tratado em RS03 e foi observada uma evolução com o desvio para o vermelho muito tênue. No entanto, ao se considerar o modelo completo de evolução proposto pelo catálogo, observou-se um aumento geral na inconsistência com o desvio para o vermelho o que motivou o uso dos diferentes tipos espectrais de galáxias na amostra pra estender a discussão sobre a inconsistência para a morfologia destas. Em todos os três tipos espectrais classificados pelos autores do catálogo foram observadas inconsistências em maior ou menor grau com a teoria. Com base nesses resultados e no argumento da consistência ideal, propôs-se ainda um modelo puramente empírico para a evolução da densidade numérica comóvel nesse catálogo.

Mostrou-se que para o modelo de evolução dos parâmetros de Schechter ajustado às contagens em G04, o afastamento entre teoria e observação poderia ser removido muito bem, dentro das margens de erro, se o parâmetro de normalização da densidade ϕ^* fosse simplesmente mantido constante, o que foi basicamente o que RS03 fizeram originalmente para os dados de L99. Argumentou-se que tal procedimento não é correto, pois o ajuste desses parâmetros em ambos os catálogos excluem um valor constante para eles dentro de dois desvios padrão. Por outro lado, tal fato parece indicar que a maior parte da inconsistência dos dados com a teoria relativística das contagens usada nesse trabalho está concentrada na evolução desse parâmetro ϕ^* . Mais ainda, ficou claro que a evolução da FL está fortemente ligada ao tipo espectral considerado, em especial nos modelos empíricos propostos para a densidade numérica em volume comóvel.

Analisou-se também como tal conexão entre teoria e prática permite discutir inhomogeneidades observacionais nas distribuições radiais de galáxias e aplicou-se tais resultados aos catálogo de G04 e de galáxias intermediárias no catálogo de L99, através do estudo das densidades diferenciais γ_i e das densidades diferenciais integrais γ_i^* , ambas definidas nas várias distâncias cosmológicas d_i ($i = A, G, L, Z$). Mostrou-se que tais densidades observadas concordam com as conclusões teóricas em Ribeiro (2005), de que pode-se ter inhomogeneidades observacionais num Universo espacialmente homogêneo e de que não se pode definir univocamente uma homogeneidade observacional, sendo essa fortemente dependente da definição observacional de distância cosmológica empregada.

Por fim, pode-se constatar um padrão de lei de potência no comportamento de γ_L e γ_z contra suas respectivas definições de distância para os dados de ambos os catálogos,

similar aos resultados em A07, o que reforça as conclusões acerca da diferença entre homogeneidade espacial e observacional obtidas em Ribeiro (2005) e Rangel Lemos & Ribeiro (2008). Grande parte dos resultados originais presentes nessa dissertação constam do artigo Iribarrem, Ribeiro & Stoeger (2009, submetido para publicação).

Bibliografia

- [1] Abell, G.O., 1965, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 3, 1.
- [2] Albani, V. V. L., **Iribarrem, A. S.**, Ribeiro, M. B., & Stoeger, W. R. 2007, *ApJ*, 657, 760-772 (A07).
- [3] Arakelyan, M.A., & Kalloglyan, A.T. 1970, *Soviet Astr. AJ*, 13, 953.
- [4] Bell, E. F. *et al.* 2003, *ApJs*, 149, 289.
- [5] Blanton, M. R. *et al.* 2003, *ApJ*, 592, 819-838.
- [6] Blanton, M. R. *et al.* 2005, *ApJ*, 631, 208-230.
- [7] Bouwens, R. *et al.* 2007, *ApJ*, 670, 928-95.8
- [8] Charlier, C. V. L. 1908, *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 4, 1.
- [9] Charlier, C. V. L. 1922, *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 16, 1.
- [10] de Vancouleurs, G. 1970, *Science*, 167, 1203.
- [11] d’Inverno, R. 1992, *Introducing Einstein’s Relativity* (Oxford: Clarendon Press).
- [12] Ellis, G. F. R. 1971, in *General Relativity and Cosmology*, ed. R. K. Sachs (Proc. Int. School Phys. “Enrico Fermi”; New York: Academic Press).
- [13] Ellis, G. F. R. 2007, *Gen. Rel. Grav.*, 39, 1047-1052.
- [14] Elmegreen, D. M. 1998, *Galaxies and Galactic Structure*, Upper Saddle River: Prentice Hall.
- [15] Etherington, I. M. H. 1933, *Phil. Mag. ser. 7*, 15, 761; reimpresso em *Gen. Rel. Grav.* 39, 1055 (2007).
- [16] Fried, J.W. *et al.* 2001, *A&A*, 367, 788-800.
- [17] Fukugita, M., Shimasaku, K., & Ichikawa, T. 1995, *PASP*, 197, 945.
- [18] Gabasch, A. *et al.* 2004, *A&A*, 421, 42-58 (G04).

- [19] Gabasch, A. *et al.* 2008, MNRAS, 383, 1319-1335.
- [20] Harrison, E. 1993, ApJ, 403, 28.
- [21] Hubble, E., 1936a, ApJ, 84, 158.
- [22] Hubble, E., 1936b, ApJ, 84, 270.
- [23] Humason, M.L., 1936, ApJ, 83, 10.
- [24] **Iribarrem, A. S.**, Ribeiro, M. B. & Stoeger, W. R. 2009, submetido.
- [25] Kiang, T., 1961, MNRAS, 122, 263.
- [26] Lin, H. *et al.* 1999, ApJ, 518, 533-561 (L99).
- [27] Lorenzo, Z. 2008, AJ, 135, 1264-1275.
- [28] Ly, C. *et al.* 2007, ApJ, 657, 738-759.
- [29] Mandelbrot, B. B. 1977, *Fractals: Form, Chance and Dimension* (New York: Freeman).
- [30] Mandelbrot, B. B. 1983, *The Fractal Geometry of Nature* (New York: Freeman).
- [31] Moura JÃ°nior, N. J. 1997, *ObservaÃ§ÃµesnaCosmologiadeEinstein – deSitter(DissertaÃ§Ã£oLodeMestrado : ObservatÃ³rioNacional)*.Normanetal. 2004, *ApJ*, 607,
- [32] Oldershaw, R. L. 1989a, *International Journal of Theoretical Physics*, 28(6), 669-694.
- [33] Oldershaw, R. L. 1989b, *International Journal of Theoretical Physics*, 28(12), 1503-1532.
- [34] Peebles, P. J. E. 1980, *The Large Scale Structure of the Universe*, (Princeton: Princeton Univ. Press).
- [35] Pietronero, L. 1987, *Physica A*, 144, 257.
- [36] Press, W.H., & Schechter, P. 1974, ApJ, 187, 425.
- [37] Poli, F. *et al.* , 2003, ApJl, 593, 1.
- [38] Pozzetti, L. *et al.* 2003, A&A, 402, 837-848.
- [39] Rangel Lemos, L. J., & Ribeiro, M. B. 2008, A&A, 488, 55-66.
- [40] Ribeiro, M. B. 1994, *Deterministic Chaos In General Relativity*, ed. D. Hobbil, A. Burd, & A. Coley (New York: Plenum Press), 269.

- [41] Ribeiro, M. B. 2001, *Gen. Rel. Grav.*, 33, 1699.
- [42] Ribeiro, M. B., & Stoeger, W. R. 2003, *ApJ*, 592, 1-16 (RS03).
- [43] Ribeiro, M. B. 2005, *A&A*, 429, 65-74.
- [44] Roos, M., *Introduction to Cosmology*, Chichester: Wiley, 1994.
- [45] Rudnick, G. *et al.* 2003, *ApJ*, 599, 847-864.
- [46] Schechter, P. 1976, *ApJ*, 203, 297-306.
- [47] Sparke, L.S., & Gallagher, J.S. 2000, *Galaxies in the Universe* (Cambridge University Press).
- [48] Springel, V. *z*, 2005, *Nature*, 435, 629-636.
- [49] Stoeger, W. R., Ellis, G. F. R., & Nel, S. D. 1992, *Class. Q. Grav.*, 9, 509.
- [50] Tzanavaris, P., & Georgantopoulos, I. 2008, *A&A*, 480, 663-670.
- [51] Vuolo, J. H., *Fundamentos da teoria de erros*, Edgard Blücher, 2000.
- [52] Wilmer, C. N. A. *et al.* 2006, *ApJ*, 647, 853-873.
- [53] Zwicky, F. 1957, *Morphological Astronomy*, Springer, pp. 166-176, 222-228.

Apêndice A

Sistemas de magnitudes

Convencionou-se um sistema de magnitudes como um conjunto de constantes C_W que permite calcular a magnitude aparente m_W a partir do fluxo de um corpo celeste, medido na Terra por um filtro W , através da equação

$$m_W = C_W - 2.5 \log F_W. \quad (\text{A.1})$$

A magnitude absoluta M_W é definida como a magnitude aparente m_W que o corpo celeste teria se estivesse a uma distância de 10 pc. Em geral, nessa definição, utiliza-se a *distância por luminosidade* d_L . Dela, quando considerado o efeito de diluição geométrica do fluxo, segue a equação

$$m_W - M_W = 5 \log d_L - 5, \quad (\text{A.2})$$

que determina o *módulo de distância* $m_W - M_W$ para magnitudes calculadas em determinado filtro W .

O sistema de magnitudes AB é definido de forma que as constantes de todos os filtros W valham -48.60, isso é

$$C_W^{AB} = -48.60. \quad (\text{A.3})$$

O sistema de magnitudes de Vega é definido de forma que a magnitude dessa estrela em todos os filtros seja zero. Segue então que, nesse sistema de magnitudes, as constantes da equação (A.1) podem ser escritas como

$$C_W^{Vega} = 2.5 \log F_W^{Vega}. \quad (\text{A.4})$$

Abaixo, é reproduzida a lista de Fukugita, Shimasaku & Ichikawa (1995) com alguns sistemas de filtros comumente usados e o fluxo de Vega (em $\times 10^{-20} \text{cgs}/Hz$) observado em cada um desses filtros. A constante C^{Vega} para cada um desses filtros é explicitada na última coluna.

Sistema de filtros	Filtro	F^{Vega}	C^{Vega}
Johnson-Morgan	U_3	1.89	-49.31
	B_2	4.02	-48.49
	V	3.59	-48.61
Cousins	R_C	3.02	-48.80
	I_C	2.38	-49.06
Johnson	R_J	2.89	-48.85
	I_J	2.28	-49.11
Sandage-Smith	u	1.89	-49.31
	b	3.97	-48.50
	v	3.64	-48.60
	r	2.90	-48.84
Strömngren	u	1.31	-49.71
	v	4.12	-48.46
	b	4.15	-48.45
	y	3.60	-48.61
Kron	U_K	1.93	-49.29
	J_K	3.82	-48.54
	F_K	3.25	-48.72
	N_K	2.44	-49.03
Couch-Newell	B_J	3.95	-48.51
	R_F	2.86	-48.86
Thuan-Gunn	u	1.38	-49.65
	v	3.50	-48.64
	g	3.89	-48.53
	r	2.96	-48.82
Schneider et al. (4-shooter)	g_4	3.78	-48.56
	r_4	2.92	-48.84
	i_4	2.41	-49.04
	z_4	2.20	-49.14
Schneider et al. (Pfuei)	g	3.74	-48.57
	r	2.91	-48.84
	i	2.43	-49.04
	z	2.19	-49.15
Schneider et al. (narrow bands)	A	2.99	-48.81
	B	2.81	-48.88
	C	2.56	-48.98
	D	2.35	-49.07
Tyson (CCD)	B_J	3.80	-48.55
	R	2.97	-48.82
	I	2.28	-49.11
WFPC2	$F555W$	3.60	-48.61
	$F606W$	3.28	-48.71
	$F702W$	2.82	-48.87
	$F814W$	2.43	-49.04
POSS II	g_{POSS}	3.74	-48.57
	r_{POSS}	2.90	-48.84
	i_{POSS}	2.46	-49.02
SDSS	u'	1.54	-49.53
	g'	3.93	-48.51
	r'	3.12	-48.76
	i'	2.51	-49.00
	z'	2.19	-49.15

Apêndice B

Incerteza da contagem cumulativa

Levando a cabo a propagação quadrática da incerteza da contagem cumulativa $[N]_{obs}$ a partir da incerteza da contagem diferencial $[dN/dz]_{obs}$ vem,

$$\{\delta[N]_{obs}\}^2 = \left\{ \frac{\partial N}{\partial(dN/dz)} \delta \left[\frac{dN}{dz} \right]_{obs} \right\}^2. \quad (\text{B.1})$$

Podemos reescrever o primeiro termo no lado direito da equação acima, a derivada em relação a $[dN/dz]_{obs}$, usando a regra da cadeia para expressá-la em termos da derivada em relação ao desvio para o vermelho. Assim, tomando a raiz quadrada em ambos os lados, a equação acima fica,

$$\delta[N]_{obs} = \frac{\partial z}{\partial(dN/dz)} \frac{\partial N}{\partial z} \delta \left[\frac{dN}{dz} \right]_{obs}, \quad (\text{B.2})$$

ou,

$$\delta[N]_{obs} = \left| \left(\frac{d^2 N}{dz^2} \right)^{-1} \frac{dN}{dz} \right| \delta \left[\frac{dN}{dz} \right]_{obs}. \quad (\text{B.3})$$

A expressão acima permite obter a incerteza de $[N]_{obs}$ a partir da incerteza de $[dN/dz]_{obs}$. A derivada segunda da contagem cumulativa, $d^2 N/dz^2$ pode facilmente ser obtida numericamente a partir da relação,

$$\frac{d^2 N}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left[\frac{dN}{dz}(r) \right] = \frac{dr}{dz} \frac{d}{dr} \left(\frac{dN}{dz} \right), \quad (\text{B.4})$$

com a expressão da contagem diferencial $dN/dz(r)$ em função da coordenada radial r dada na equação (2.51) e a de dr/dz obtida a partir da equação (2.50). O gráfico B.1 deixa claro que o comportamento analítico dessa grandeza possui uma raiz dentro do intervalo de desvio para o vermelho estudado, fazendo com que a incerteza da contagem cumulativa $\delta[N]_{obs}$ fique maior que a própria contagem na vizinhança dessa raiz.

Para tentar resolver esse problema pode-se considerar expansões em ordens superiores da propagação quadrática das incertezas (cf. Vuolo, 2000). Até segunda ordem na

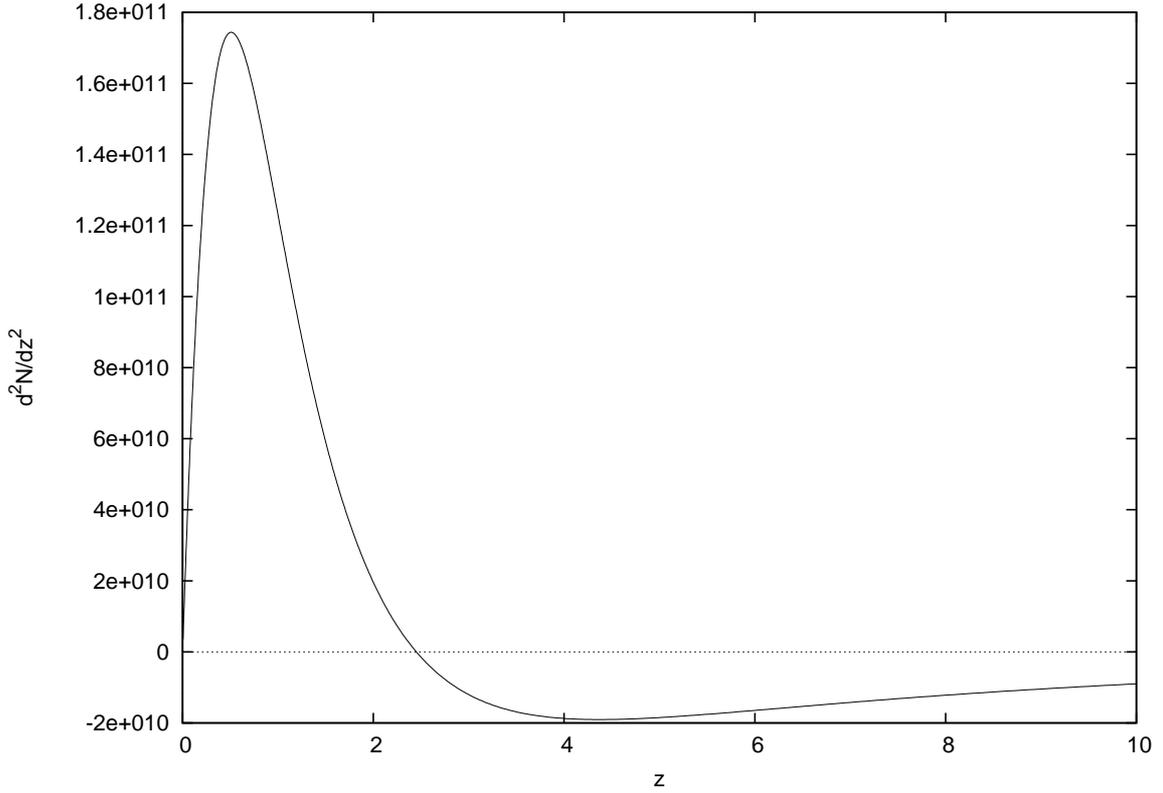


Figura B.1: Derivada segunda da contagem cumulativa em relação ao desvio para o vermelho

incerteza da contagem diferencial $[dN/dz]_{obs}$ a equação (B.1) é reescrita como,

$$\{\delta[N]_{obs}\}^2 = \left\{ \frac{\partial N}{\partial(dN/dz)} \delta \left[\frac{dN}{dz} \right]_{obs} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(dN/dz)} \left[\frac{\partial N}{\partial(dN/dz)} \right] \left\{ \delta \left[\frac{dN}{dz} \right]_{obs} \right\}^2 \right\}^2. \quad (B.5)$$

Tomando a raiz quadrada em ambos os lados, o primeiro termo do lado direito da equação acima se escreve como na equação (B.2) enquanto o segundo termo pode ser reescrito transformando a derivada em relação a contagem diferencial numa em relação ao desvio para o vermelho de modo similar ao que foi feito na passagem da equação (B.1) para a equação (B.2), resultando em,

$$\delta[N]_{obs} = \left(\frac{d^2N}{dz^2} \right)^{-1} \frac{dN}{dz} \delta \left[\frac{dN}{dz} \right]_{obs} + \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial(dN/dz)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial z}{\partial(dN/dz)} \frac{\partial N}{\partial z} \right] \left\{ \delta \left[\frac{dN}{dz} \right]_{obs} \right\}^2. \quad (B.6)$$

É fácil perceber que a derivada em relação ao desvio para o vermelho que aparece no lado direito da última equação pode ser escrita como,

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial z}{\partial(dN/dz)} \frac{\partial N}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial(dN/dz)} \left(\frac{dN}{dz} \right) + \frac{\partial z}{\partial(dN/dz)} \frac{d^2N}{dz^2} = 2. \quad (B.7)$$

Substituindo esse resultado na equação (B.6) obtém-se,

$$\delta[N]_{obs} = \left| \frac{\frac{dN}{dz} \delta \left[\frac{dN}{dz} \right]_{obs} + \left\{ \delta \left[\frac{dN}{dz} \right]_{obs} \right\}^2}{\frac{d^2 N}{dz^2}} \right|. \quad (\text{B.8})$$

Fica então claro que considerar ordens superiores da expansão quadrática também não remove o problema, pois ainda que pouco, a incerteza aumenta. Para o presente trabalho foram então simplesmente desconsideradas as incertezas na vizinhança da raiz de $d^2 N/dz^2$.

Apêndice C

Rotinas numéricas

Para se aplicar o formalismo geral delineado nesse trabalho a um determinado modelo cosmológico é preciso primeiro obter, a partir desse modelo, uma equação para dS/dr , em geral combinando dS/dt obtida de um equação do tipo de Friedmann com dt/dr obtida através das geodésicas nulas para a métrica desse modelo. A segunda equação, dN/dr pode ser obtida através do resultado chave da equação (2.31) combinado a uma equação para dy/dr das geodésicas nulas do modelo. Todas as derivadas em relação ao desvio para o vermelho podem ser obtidas pela regra da cadeia a partir de suas correspondentes derivadas em relação a coordenada radial r , como delineado na equação (2.48). A equação dr/dz específica para o modelo pode ser obtida a partir da definição geral de desvio para o vermelho e sua relação com o fator de escala, dado pela equação (2.47). Tal equação também permite obter a lista com os valores de $z(r)$. Uma vez calculada dN/dz por esse processo, pode-se obter a densidade relativística por fonte μ pela equação geral (2.52). A definição da distância por área a torna dependente do modelo. De posse dos valores numéricos para o fator de escala pode-se obter a dependência dessa distância com a coordenada radial. Utilizando o resultado do teorema de reciprocidade Etherington dado na equação (2.57), pode-se obter listas para as demais distâncias, d_L , d_G e d_z , utilizando os valores para $z(r)$. A derivada com o desvio para o vermelho de d_A pode ser obtida usando $d(d_A)/dr$ dada pelo modelo e dr/dz de maneira similar ao que foi feito no cálculo de dN/dz . As derivadas com o desvio para o vermelho podem então ser calculadas, seguindo as equações (2.67) e (2.68). Isso permite calcular as diferentes densidades diferenciais γ através da equação (2.61). Os volumes podem ser facilmente obtidos através da equação (2.63) e com eles as densidades diferenciais integrais γ^* , através da equação (2.74). As funções de seleção específicas são obtidas de maneira geral por quadraturas usando a equação (1.6) e suas incertezas propagadas quadraticamente. A função de seleção pode então ser calculada levando em consideração os dados do catálogo, segundo a equação (1.7). A função de completeza $J(z)$ pode então ser obtida de maneira geral, através da equação (3.9). Uma vez obtida $J(z)$ e suas incertezas, pode-se determinar os valores observacionais de qualquer grandeza proporcional a dN/dz através da equação (3.1).

Seguem as rotinas numéricas usadas no trabalho. Elas foram escritas para serem rodadas pela versão 11 do maple.

C.1 Funções de seleção

```

> restart;
> for w from 1 to 5 do
Mest[w]:=unapply(M0est[w] + a[w] * ln(1+z),z);
phi[w]:=unapply(phi0[w] * ((1+z)^(b[w])),z):

psi0[w]:=unapply(0.4*ln(10)*phi[w](z)*int(10^(0.4*(1+alpha[w])*(Mest[w](z)-Mbar))
*exp(-10^(0.4*(Mest[w](z)-Mbar))),Mbar=-28.77..-10.77),z):

UpErpsi0[w]:=unapply(sqrt(diff(psi0[w](z),a[w])^2*(UpEra[w]^2) +
diff(psi0[w](z),b[w])^2*(UpErb[w]^2) +
diff(psi0[w](z),M0est[w])^2*(UpErM0est[w]^2) +
diff(psi0[w](z),phi0[w])^2*(UpErphi0[w]^2) +
diff(psi0[w](z),alpha[w])^2*(Eralpha[w]^2)),z):

DnErpsi0[w]:=unapply(sqrt(diff(psi0[w](z),a[w])^2*(DnEra[w]^2) +
diff(psi0[w](z),b[w])^2*(DnErb[w]^2) +
diff(psi0[w](z),M0est[w])^2*(DnErM0est[w]^2) +
diff(psi0[w](z),phi0[w])^2*(DnErphi0[w]^2) +
diff(psi0[w](z),alpha[w])^2*(Eralpha[w]^2)),z):

psi[w]:=unapply(0.4*ln(10)*phi[w](z)*int(10^(0.4*(1+alpha[w])*(Mest[w](z)-Mbar))
*exp(-10^(0.4*(Mest[w](z)-Mbar))),Mbar=-500..-0.1),z):

UpErpsi[w]:=unapply(sqrt(diff(psi[w](z),a[w])^2*(UpEra[w]^2) +
diff(psi[w](z),b[w])^2*(UpErb[w]^2) +
diff(psi[w](z),M0est[w])^2*(UpErM0est[w]^2) +
diff(psi[w](z),phi0[w])^2*(UpErphi0[w]^2) +
diff(psi[w](z),alpha[w])^2*(Eralpha[w]^2)),z):

DnErpsi[w]:=unapply(sqrt(diff(psi[w](z),a[w])^2*(DnEra[w]^2) +
diff(psi[w](z),b[w])^2*(DnErb[w]^2) +
diff(psi[w](z),M0est[w])^2*(DnErM0est[w]^2) +
diff(psi[w](z),phi0[w])^2*(DnErphi0[w]^2) +
diff(psi[w](z),alpha[w])^2*(Eralpha[w]^2)),z):

dpsi0dz[w]:=unapply(diff(psi0[w](z),z),z):
dpsidz[w]:=unapply(diff(psi[w](z),z),z):

UpErdpsi0dz[w]:=unapply(sqrt(diff(dpsi0dz[w](z),a[w])^2*(UpEra[w]^2) +
diff(dpsi0dz[w](z),b[w])^2*(UpErb[w]^2) +
diff(dpsi0dz[w](z),M0est[w])^2*(UpErM0est[w]^2) +

```

```

diff(dpsi0dz[w](z),phi0[w])^2* (UpErphi0[w]^2) +
diff(dpsi0dz[w](z),alpha[w])^2* (Eralpha[w]^2)),z):

DnErdpsi0dz[w]:=unapply(sqrt(diff(dpsi0dz[w](z),a[w])^2*(DnEra[w]^2) +
diff(dpsi0dz[w](z),b[w])^2*(DnErb[w]^2) +
diff(dpsi0dz[w](z),M0est[w])^2*(DnErM0est[w]^2) +
diff(dpsi0dz[w](z),phi0[w])^2* (DnErphi0[w]^2) +
diff(dpsi0dz[w](z),alpha[w])^2* (Eralpha[w]^2)),z):

d2psi0dz2[w]:=unapply(diff(dpsi0dz[w](z),z),z):
d2psidz2[w]:=unapply(diff(dpsidz[w](z),z),z):

end do:
> a:=[-0.0219, -0.0205, -0.0180, -0.0108, -0.0103]:
UpEra:=[0.0019, 0.0023, 0.0024, 0.0030, 0.0023]:
DnEra:=[0.0019, 0.0024, 0.0021, 0.0028, 0.0028]:
> b:=[-1.76, -1.74, -1.70, -1.29, -1.27]:
UpErb:=[0.15, 0.15, 0.14, 0.18, 0.16]:
DnErb:=[0.15, 0.16, 0.15, 0.18, 0.19]:
> M0est:=[-17.40, -18.16, -18.95, -21.00, -20.92]:
UpErM0est:=[0.25, 0.27, 0.24, 0.32, 0.32]:
DnErM0est:=[0.22, 0.26, 0.26, 0.31, 0.25]:
> phi0:=[0.0271, 0.0246, 0.0219, 0.0083, 0.0082]:
UpErphi0:=[0.0047, 0.0039, 0.0037, 0.0015, 0.0014]:
DnErphi0:=[0.0038, 0.0037, 0.0028, 0.0012, 0.0012]:
> alpha:=[-1.01,-1.06,-1.10,-1.26,-1.24]:
Eralpha:=[0.08,0.07,0.08,0.04,0.04]:
> z0[1]:=0.50: z0[2]:=0.75: z0[3]:=1.00: z0[4]:=1.25: z0[5]:=1.50:
z0[6]:=1.75: z0[7]:=2.00: z0[8]:=2.25: z0[9]:=2.50: z0[10]:=2.75:
z0[11]:=3.00: z0[12]:=3.25: z0[13]:=3.50: z0[14]:=3.75: z0[15]:=4.00:
z0[16]:=4.25: z0[17]:=4.50: z0[18]:=4.75: z0[19]:=5.00:
> for w from 1 to 5 do
for j from 1 to 19 do
arraypsi := [seq([seq(simplify(psi[w](z0[j])),j=1..19)],w=1..5)]:
arraypsi0 := [seq([seq(simplify(psi0[w](z0[j])),j=1..19)],w=1..5)]:
arrayUpErpsi0 := [seq([seq(simplify(UpErpsi0[w](z0[j])),j=1..19)],w=1..5)]:
arrayDnErpsi0 := [seq([seq(simplify(DnErpsi0[w](z0[j])),j=1..19)],w=1..5)]:
arrayUpErpsi := [seq([seq(simplify(UpErpsi[w](z0[j])),j=1..19)],w=1..5)]:
arrayDnErpsi := [seq([seq(simplify(DnErpsi[w](z0[j])),j=1..19)],w=1..5)]:
arrayUpErdpsi0dz := [seq([seq(simplify(UpErdpsi0dz[w](z0[j])),j=1..19)],w=1..5)]:
arrayDnErdpsi0dz := [seq([seq(simplify(DnErdpsi0dz[w](z0[j])),j=1..19)],w=1..5)]:
arraydpsidz := [seq([seq(simplify(dpsidz[w](z0[j])),j=1..19)],w=1..5)]:
arraydpsi0dz := [seq([seq(simplify(dpsi0dz[w](z0[j])),j=1..19)],w=1..5)]:
arrayd2psidz2 := [seq([seq(simplify(d2psidz2[w](z0[j])),j=1..19)],w=1..5)]:
arrayd2psi0dz2 := [seq([seq(simplify(d2psi0dz2[w](z0[j])),j=1..19)],w=1..5)]:
end do
end do;

```

```

> writedata("psi.dat",arraypsi); writedata("psi0.dat",arraypsi0);
writedata("dpsidz.dat",arraydpsidz); writedata("dpsi0dz.dat",arraydpsi0dz);
writedata("d2psidz2.dat",arraydpsidz); writedata("d2psi0dz2.dat",arraydpsi0dz);
writedata("UpErpsi0.dat",arrayUpErpsi0); writedata("DnErpsi0.dat",arrayDnErpsi0);
writedata("UpErpsi.dat",arrayUpErpsi); writedata("DnErpsi.dat",arrayDnErpsi);
writedata("UpErdpsi0dz.dat",arrayUpErdpsi0dz); writedata("DnErdpsi0dz.dat",arrayDnErdpsi0dz);

```

C.2 Runge-Kutta

```

> restart;
> with(student); with(CurveFitting); CurveFitting[Spline]; with(plots);
> Digits := 16;
#
# Testes de Consistência & Estatísticas Radiais
#
# Obs.: É necessário rodar primeiro a worksheet do cálculo das funções de seleção (psi-v3.mw)
#caso os arquivos de entrada dessas funções ainda não tenham sido criados.
#
#
# 1. Parte Teórica
#
# 1.1. Solução Numérica
#
# Entrando com os parametros da cosmologia:
> Om := .3; Ol := .7; h := .7;
#
# Definindo as constantes do problema nas unidades s, Mpc e M_sun:
> Omega := Om+Ol; Mg := 0.1e12;
> c := 0.971561183e-14; G := 0.4457179e-47; Hzero := 0.324077927e-17*h; Szero := 1;
#
# Definindo o problema numérico:
> expr1 := c^2-(Omega-1)*(Hzero*Szero*r)^2;
> dSdr := -Hzero*sqrt((Ol*S(r)^4-Szero^2*(Omega-1)*S(r)^2+Om*Szero^3*S(r))/expr1);
> dtldr := -sqrt(S(r)^2/expr1);
> dNdr := 3*c*Om*Hzero^2*Szero^3*r^2/((2*G*Mg)*sqrt(expr1));
> odeS := diff(S(r), r)-dSdr;
> odet := diff(t(r), r)-dtldr;
> odeN := diff(N(r), r)-dNdr;
> odesys := odeS, odet, odeN;
#
# Entrando com o conjunto de condições iniciais do problema:
> IC := S(0) = Szero, t(0) = 0, N(0) = 0;
#
# Armazenando as listas de resposta do método numérico:
> sol:=dsolve({odesys, IC},{t(r),N(r),S(r)},numeric,method=rkf45,output=listprocedure);
> S := eval(S(r), sol);

```

```

> t := eval(t(r), sol);
> N := eval(N(r), sol);
#
#
# 1.2. Quantidades teóricas de interesse
#
# Redshift:
> z := S(0)/S-1;
#
# Distâncias cosmológicas:
> dA := unapply(r*S(r), r);
> dG := unapply((1+z(r))*dA(r), r);
> dL := unapply((1+z(r))^2*dA(r), r);
> dz := unapply(c*z(r)/Hzero, r);
#
# Derivadas das distancias em relação ao redshift:
> ddAdz := unapply(drdz(r)*(S(r)+r*dSdr), r);
> ddGdz := unapply(dA(r)+(1+z(r))*ddAdz(r), r);
> ddLdz := unapply((2*(1+z(r)))*dA(r)+(1+z(r))^2*ddAdz(r), r);
> ddzdz := unapply(c/Hzero, r);
#
# Volumes:
> VA := unapply((4*Pi*1/3)*dA(r)^3, r);
> VG := unapply((4*Pi*1/3)*dG(r)^3, r);
> VL := unapply((4*Pi*1/3)*dL(r)^3, r);
> Vz := unapply((4*Pi*1/3)*dz(r)^3, r);
> Vc := unapply((4*Pi*1/3)*r^3, r);
#
# Derivadas dos volumes em relação ao redshift:
> dVAdz := unapply(4*Pi*dA(r)^2*ddAdz(r), r);
> dVGdz := unapply(4*Pi*dG(r)^2*ddGdz(r), r);
> dVLdz := unapply(4*Pi*dL(r)^2*ddLdz(r), r);
> dVzdz := unapply(4*Pi*dz(r)^2*ddzdz(r), r);
#
# Contagens e Densidade Diferenciais:
> drdz := unapply(-S(r)^2/(Szero*dSdr), r);
> dNdz := unapply(drdz(r)*dNdr, r);
> mu := unapply(Mg*dNdz(r)*S(r)^3/(4*Pi*dA(r)^2), r);
> d2Ndz2 := unapply(subs(diff(S(r), r) = dSdr, drdz(r)*(diff(dNdz(r), r))), r);
#
# Densidades numérica e de massa:
> rhoth := unapply(simplify(Mg*N(r)/Vc(r)), r);
> n := unapply(simplify(N(r)/Vc(r)), r);
> dndz := unapply(subs(diff(N(r), r) = dNdr, drdz(r)*(diff(n(r), r))), r);
> d2ndz2:=unapply(subs(diff(N(r),r)=dNdr,subs(diff(S(r),r)=dSdr,drdz(r)*(diff(dndz(r),r))))),r);
#
# Densidades Diferenciais Numéricas:

```

```

> gA := unapply(dNdz(r)/dVAdz(r), r);
> gG := unapply(dNdz(r)/dVGdz(r), r);
> gL := unapply(dNdz(r)/dVLdz(r), r);
> gz := unapply(dNdz(r)/dVzdz(r), r);
#
# Densidades Diferenciais Integrais Numéricas:
> gestA := unapply(N(r)/VA(r), r);
> gestG := unapply(N(r)/VG(r), r);
> gestL := unapply(N(r)/VL(r), r);
> gestz := unapply(N(r)/Vz(r), r);
#
# Montando os arquivos de saída .DAT com as listas de saída do RK4, distâncias, contagens,
# gamma e gamma* teóricos:
# (na determinação do multiplicador do seq em rth, 16 faz o z final ~5 enquanto 20 faz
# o z final ~13)
> rth := [seq(19*i, i = 1 .. 500)];
> tth := [seq(t(rth[i]), i = 1 .. 500)];
> zth := [seq(z(rth[i]), i = 1 .. 500)];
> Sth := [seq(S(rth[i]), i = 1 .. 500)];
> Nth := [seq(N(rth[i]), i = 1 .. 500)];
> dAth := [seq(dA(rth[i]), i = 1 .. 500)];
> dGth := [seq(dG(rth[i]), i = 1 .. 500)];
> dLth := [seq(dL(rth[i]), i = 1 .. 500)];
> dzth := [seq(dz(rth[i]), i = 1 .. 500)];
> muth := [seq(simplify(mu(rth[i])), i = 1 .. 500)];
> dNdzth := [seq(dNdz(rth[i]), i = 1 .. 500)];
> d2Ndz2th := [seq(d2Ndz2(rth[i]), i = 1 .. 500)];
> gAth := [seq(gA(rth[i]), i = 1 .. 500)];
> gGth := [seq(gG(rth[i]), i = 1 .. 500)];
> gLth := [seq(gL(rth[i]), i = 1 .. 500)];
> gzth := [seq(gz(rth[i]), i = 1 .. 500)];
> gestAth := [seq(gestA(rth[i]), i = 1 .. 500)];
> gestGth := [seq(gestG(rth[i]), i = 1 .. 500)];
> gestLth := [seq(gestL(rth[i]), i = 1 .. 500)];
> gestzth := [seq(gestz(rth[i]), i = 1 .. 500)];
> arrayRK4 := array(simplify([rth, zth, tth, Sth, Nth]));
> arraydth := array(simplify([zth, dAth, dGth, dLth, dzth]));
> arrayNth := array(simplify([zth, Nth, dNdzth, muth, d2Ndz2th]));
> arraygth := array(simplify([zth, gAth, gGth, gLth, gzth]));
> arraygestth := array(simplify([zth, gestAth, gestGth, gestLth, gestzth]));
> arraygvsdth := array(simplify([gLth, gestLth, dLth, gzth, gestzth, dzth]));
> dataRK4 := array(1 .. 500, 1 .. 5); datadth := array(1 .. 500, 1 .. 5);
> dataNth := array(1 .. 500, 1 .. 5); datagth := array(1 .. 500, 1 .. 5);
> datagestth := array(1 .. 500, 1 .. 5); datagvsdth := array(1 .. 500, 1 .. 6);
> for i to 5 do for j to 500 do
> dataRK4[j, i] := arrayRK4[i, j]; datadth[j, i] := arraydth[i, j];
> dataNth[j, i] := arrayNth[i, j]; datagth[j, i] := arraygth[i, j];

```

```

> datagestth[j, i] := arraygestth[i, j] end do end do;
> for i to 6 do for j to 500 do datagvsdth[j, i] := arraygvsdth[i, j] end do end do;
> writedata("RK4.dat", dataRK4);
> writedata("pf_d-th.dat", datadth);
> writedata("N.dat", dataNth);
> writedata("pf_gamma-th.dat", datagth);
> writedata("pf_gest-th.dat", datagestth);
> writedata("pf_gvsd-th.dat", datagvsdth);
#
# 2. Parte Observacional
#
# 2.1. Coordenadas radiais e redshifts para o catálogo
#
# A seguir, um comando para descobrir qual r corresponde a determinado z.
> evalf(z(0.1e4));
#
# A lista dos r que geram os z escolhidos, determinados pelo comando anterior:
> r0[1] := 1888.63; r0[2] := 2648.79; r0[3] := 3303.83; r0[4] := 3870.44;
> r0[5] := 4363.86; r0[6] := 4796.86; r0[7] := 5179.87; r0[8] := 5521.20;
> r0[9] := 5827.54; r0[10] := 6104.26; r0[11] := 6355.69; r0[12] := 6585.35;
> r0[13] := 6796.15; r0[14] := 6990.49; r0[15] := 7170.36; r0[16] := 7337.47;
> r0[17] := 7493.22; r0[18] := 7638.84; r0[19] := 7775.37;
#
# A lista dos z escolhidos (espaçamento ~0.25 varrendo todo o intervalo
# z=[0.45 , 5.01] do catálogo FORs):
> z0 := [seq(z(r0[i]), i = 1 .. 19)];
#
#
# 2.2. Quantidades observacionais de interesse
#
# Lendo as funções de seleção psi[w,i], calculadas pela sheet psi-v3.mw,
# a partir da eq. (97) do artigo astro-ph/0304094:
> psi0 := readdata("psi0.dat", 19); psi := readdata("psi.dat", 19);
> dpsio0dz := readdata("dpsio0dz.dat", 19); dpsidz := readdata("dpsidz.dat", 19);
> UpErpsi0 := readdata("UpErpsi0.dat", 19); DnErpsi0 := readdata("DnErpsi0.dat", 19);
> UpErdpsio0dz := readdata("UpErdpsio0dz.dat", 19);
> DnErdpsio0dz := readdata("DnErdpsio0dz.dat", 19);
> UpErpsi := readdata("UpErpsi.dat", 19); DnErpsi := readdata("DnErpsi.dat", 19);
#
# Escrevendo a função de completudeza J(z), sua derivada dJdz e seus erros,
# a partir dos psis acima:
> J := [seq(simplify(add(psi0[w, i], w = 1 .. 5)/(5*n(r0[i]))), i = 1 .. 19)];
> dJdz:= [seq(simplify(add(dpsio0dz[w, i], w = 1..5)/
(5*n(r0[i]))-J[i]*dndz(r0[i])/n(r0[i])), i=1..19)];
> UpErJ:= [seq(simplify(sqrt(add(UpErpsi0[w, i]^2, w=1..5)/(5*n(r0[i]))^2)), i=1..19)];
> DnErJ:= [seq(simplify(sqrt(add(DnErpsi0[w, i]^2, w=1..5)/(5*n(r0[i]))^2)), i=1..19)];
> UpErdJdz:= [seq(simplify(sqrt((add(UpErdpsio0dz[w, i], w=1..5)/(5*n(r0[i]))^2)), i=1..19)];

```

```

> DnErdJdz:= [seq(simplify(sqrt((add(DnErdpsi0dz[w,i],w=1..5)/(5*n(r0[i])))^2)),i=1..19)];
#
# Escrevendo a quantidade dN/dz observacional a partir da Eq. (19)
# do artigo astro-ph/0304094:
> dNdz0 := [seq(dNdz(r0[i])*J[i], i = 1 .. 19)];
> UpErdNdz0 := [seq(sqrt(dNdz(r0[i])^2*UpErJ[i]^2), i = 1 .. 19)];
> DnErdNdz0 := [seq(sqrt(dNdz(r0[i])^2*DnErJ[i]^2), i = 1 .. 19)];
#
# Para a segunda tabela do artigo I09:
> dNdzth0 := [seq(dNdz(r0[i]), i = 1 .. 19)];
#
# Densidade relativística por fonte:
> mu0 := [seq(simplify(J[i]*mu(r0[i])), i = 1 .. 19)];
> UpErmu0 := [seq(simplify(UpErJ[i]*mu(r0[i])), i = 1 .. 19)];
> DnErmu0 := [seq(simplify(DnErJ[i]*mu(r0[i])), i = 1 .. 19)];
#
# Montando os arquivos de saída .DAT com os dados de J e dNdz e suas incertezas
# na forma de colunas:
> arraydNdz0 := array(simplify([z0, dNdzth0, dNdz0, UpErdNdz0, DnErdNdz0]));
> arrayJ := array(simplify([z0, J, UpErJ, DnErJ, dJdz]));
> arraymu := array(simplify([z0, mu0, UpErmu0, DnErmu0]));
> datadNdz0 := array(1 .. 19, 1 .. 5); dataJ := array(1 .. 19, 1 .. 5);
> datamu := array(1 .. 19, 1 .. 4);
> for i to 5 do for j to 19 do
> datadNdz0[j, i] := arraydNdz0[i, j]; dataJ[j, i] := arrayJ[i, j] end do end do;
> for i to 4 do for j to 19 do datamu[j, i] := arraymu[i, j] end do end do;
> writedata("dNdz.dat", datadNdz0);
> writedata("Jvsz.dat", dataJ);
> writedata("mu.dat", datamu);
#
#
# 2.3. Cálculo das quantidades observacionais para os redshifts selecionados
#
#
# 2.3.1. Impressão das funções de seleção psi[w,i] e de seus erros:
#
# Montando os arquivos de saída .DAT com os dados de psi e suas
# incertezas na forma de colunas:
> array1500psi:=array(simplify([z0,op(1,psi0),op(1,UpErpsi0),op(1,DnErpsi0)]));
> array2800psi:=array(simplify([z0,op(2,psi0),op(2,UpErpsi0),op(2,DnErpsi0)]));
> arrayupsi:=array(simplify([z0,op(3,psi0),op(3,UpErpsi0),op(3,DnErpsi0)]));
> arraygpsi:=array(simplify([z0,op(4,psi0),op(4,UpErpsi0),op(4,DnErpsi0)]));
> arraybpsi:=array(simplify([z0,op(5,psi0),op(5,UpErpsi0),op(5,DnErpsi0)]));
> arraypsi:=array(simplify([z0,op(1,psi0),op(1,UpErpsi0),op(1,DnErpsi0),op(2,psi0),
op(2,UpErpsi0),op(2,DnErpsi0),op(3,psi0),op(3,UpErpsi0),op(3,DnErpsi0),op(4,psi0),
op(4,UpErpsi0),op(4,DnErpsi0),op(5,psi0),op(5,UpErpsi0),op(5,DnErpsi0)]));
> data1500psi := array(1 .. 19, 1 .. 4); data2800psi := array(1 .. 19, 1 .. 4);

```

```

> dataupsi := array(1 .. 19, 1 .. 4); datagpsi := array(1 .. 19, 1 .. 4);
> databpsi := array(1 .. 19, 1 .. 4); datapsi := array(1 .. 19, 1 .. 16);
> for i to 16 do for j to 19 do datapsi[j, i] := arraypsi[i, j] end do end do;
> for i to 4 do for j to 19 do
data1500psi[j, i] := array1500psi[i, j]; data2800psi[j, i] := array2800psi[i, j];
dataupsi[j, i] := arrayupsi[i, j]; datagpsi[j, i] := arraygpsi[i, j];
databpsi[j, i] := arraybpsi[i, j] end do end do;
> writedata("1500psi.dat", data1500psi); writedata("2800psi.dat", data2800psi);
> writedata("upsi.dat", dataupsi); writedata("gpsi.dat", datagpsi);
> writedata("bpsi.dat", databpsi); writedata("psitotal.dat", datapsi);
#
#
# 2.3.2. Cálculo dos Gammas (em Mpc**-3):
#
# Escrevendo os gammas:
> gammaA0 := simplify([seq(dNdz0[i]/dVAdz(r0[i]), i = 1 .. 19)]);
> UpErgammaA0 := simplify([seq(sqrt((UpErdNdz0[i]/dVAdz(r0[i]))^2), i = 1 .. 19)]);
> DnErgammaA0 := simplify([seq(sqrt((DnErdNdz0[i]/dVAdz(r0[i]))^2), i = 1 .. 19)]);
> gammaG0 := simplify([seq(dNdz0[i]/dVGdz(r0[i]), i = 1 .. 19)]);
> UpErgammaG0 := simplify([seq(sqrt((UpErdNdz0[i]/dVGdz(r0[i]))^2), i = 1 .. 19)]);
> DnErgammaG0 := simplify([seq(sqrt((DnErdNdz0[i]/dVGdz(r0[i]))^2), i = 1 .. 19)]);
> gammaL0 := simplify([seq(dNdz0[i]/dVLdz(r0[i]), i = 1 .. 19)]);
> UpErgammaL0 := simplify([seq(sqrt((UpErdNdz0[i]/dVLdz(r0[i]))^2), i = 1 .. 19)]);
> DnErgammaL0 := simplify([seq(sqrt((DnErdNdz0[i]/dVLdz(r0[i]))^2), i = 1 .. 19)]);
> gammaz0 := simplify([seq(dNdz0[i]/dVzdz(r0[i]), i = 1 .. 19)]);
> UpErgammaz0 := simplify([seq(sqrt((UpErdNdz0[i]/dVzdz(r0[i]))^2), i = 1 .. 19)]);
> DnErgammaz0 := simplify([seq(sqrt((DnErdNdz0[i]/dVzdz(r0[i]))^2), i = 1 .. 19)]);
#
# Montando os arquivos de saída .DAT com os dados de gamma e suas incertezas na
#forma de colunas:
> arraygammaA := array(simplify([z0, gammaA0, UpErgammaA0, DnErgammaA0]));
> arraygammaG := array(simplify([z0, gammaG0, UpErgammaG0, DnErgammaG0]));
> arraygammaL := array(simplify([z0, gammaL0, UpErgammaL0, DnErgammaL0]));
> arraygammaz := array(simplify([z0, gammaz0, UpErgammaz0, DnErgammaz0]));
> arraygamma := array(simplify([z0, gammaA0, UpErgammaA0, DnErgammaA0, gammaG0,
UpErgammaG0, DnErgammaG0, gammaL0, UpErgammaL0, DnErgammaL0, gammaz0, UpErgammaz0,
DnErgammaz0]));
> datagammaA := array(1 .. 19, 1 .. 4); datagammaG := array(1 .. 19, 1 .. 4);
> datagammaL := array(1 .. 19, 1 .. 4); datagammaz := array(1 .. 19, 1 .. 4);
> datagamma := array(1 .. 19, 1 .. 13);
> for i to 13 do for j to 19 do datagamma[j, i] := arraygamma[i, j] end do end do;
> for i to 4 do for j to 19 do datagammaA[j, i] := arraygammaA[i, j];
datagammaG[j, i] := arraygammaG[i, j]; datagammaL[j, i] := arraygammaL[i, j];
datagammaz[j, i] := arraygammaz[i, j] end do end do;
> writedata("gammaA.dat", datagammaA); writedata("gammaG.dat", datagammaG);
> writedata("gammaL.dat", datagammaL); writedata("gammaz.dat", datagammaz);
>writedata("gamma.dat", datagamma);

```

```

#
#
# 2.3.3. Cálculo dos Gamma*:
#
# Interpolando o integrando de N0:
> fdNdz := PolynomialInterpolation([op(z0)], [op(dNdz0)], y);
#
# Cálculo da contagem cumulativa observacional N0:
> N0 := [seq(int(fdNdz, y = 0 .. z0[i]), i = 1 .. 19)];
#
# Para calcular as incertezas de Gamma* é preciso conhecer a derivada segunda
# da contagem observada em relação ao desvio para o vermelho. Para calcular essa
# quantidade basta derivar dN/dz em relação a z enquanto a primeira ainda está em
# sua forma analítica. Assim:
> d2Ndz20 := [seq(simplify(J[i]*d2Ndz2(r0[i])+dJdz[i]*dNdz(r0[i])), i = 1 .. 19)];
#
# Com isso, podemos escrever a incerteza em N em função da incerteza em dN/dz como:
> UpErN:= [seq(simplify(sqrt((dNdz(r0[i])*UpErdNdz0[i]/d2Ndz2(r0[i]))^2)), i=1..19)];
> DnErN:= [seq(simplify(sqrt((dNdz(r0[i])*DnErdNdz0[i]/d2Ndz2(r0[i]))^2)), i=1..19)];
#
# Cálculo dos Gamma*. Como Gamma* é igual a N/V, sua incerteza é simplesmente
# (incerteza de N)/V:
> gestA0 := simplify([seq(N0[i]/VA(r0[i]), i = 1 .. 19)]);
> UpErgestA0 := simplify([seq(UpErN[i]/VA(r0[i]), i = 1 .. 19)]);
> DnErgestA0 := simplify([seq(DnErN[i]/VA(r0[i]), i = 1 .. 19)]);
> gestL0 := simplify([seq(N0[i]/VL(r0[i]), i = 1 .. 19)]);
> UpErgestL0 := simplify([seq(UpErN[i]/VL(r0[i]), i = 1 .. 19)]);
> DnErgestL0 := simplify([seq(DnErN[i]/VL(r0[i]), i = 1 .. 19)]);
> gestG0 := simplify([seq(N0[i]/VG(r0[i]), i = 1 .. 19)]);
> UpErgestG0 := simplify([seq(UpErN[i]/VG(r0[i]), i = 1 .. 19)]);
> DnErgestG0 := simplify([seq(DnErN[i]/VG(r0[i]), i = 1 .. 19)]);
> gestz0 := simplify([seq(N0[i]/Vz(r0[i]), i = 1 .. 19)]);
> UpErgestz0 := simplify([seq(UpErN[i]/Vz(r0[i]), i = 1 .. 19)]);
> DnErgestz0 := simplify([seq(DnErN[i]/Vz(r0[i]), i = 1 .. 19)]);
#
# Montando os arquivos de saída .DAT com os dados de gamma* e suas incertezas
# na forma de colunas:
> arraygestA := array(simplify([z0, gestA0, UpErgestA0, DnErgestA0]));
> arraygestG := array(simplify([z0, gestG0, UpErgestG0, DnErgestG0]));
> arraygestL := array(simplify([z0, gestL0, UpErgestL0, DnErgestL0]));
> arraygestz := array(simplify([z0, gestz0, UpErgestz0, DnErgestz0]));
> arraygest := array(simplify([z0, gestA0, UpErgestA0, DnErgestA0, gestG0,
UpErgestG0, DnErgestG0, gestL0, UpErgestL0, DnErgestL0, gestz0, UpErgestz0,
DnErgestz0]));
> datagestA := array(1 .. 19, 1 .. 4); datagestG := array(1 .. 19, 1 .. 4);
> datagestL := array(1 .. 19, 1 .. 4); datagestz := array(1 .. 19, 1 .. 4);
> datagest := array(1 .. 19, 1 .. 13);

```

```

> for i to 13 do for j to 19 do datagest[j, i] := arraygest[i, j] end do end do;
> for i to 4 do for j to 19 do datagestA[j, i] := arraygestA[i, j];
datagestG[j, i] := arraygestG[i, j]; datagestL[j, i] := arraygestL[i, j];
datagestz[j, i] := arraygestz[i, j] end do end do;
> writedata("gestA.dat", datagestA); writedata("gestG.dat", datagestG);
> writedata("gestL.dat", datagestL); writedata("gestz.dat", datagestz);
> writedata("gest.dat", datagest);
#
# Montando o arquivo de saída .DAT com os dados de gamma, gamma* e suas distâncias
# para os z0 selecionados:
> dL0 := [seq(dL(r0[i]), i = 1 .. 19)]; dz0 := [seq(dz(r0[i]), i = 1 .. 19)];
> arraygvsd := array(simplify([gammaL0, UpErgammaL0, DnErgammaL0, gestL0,
UpErgestL0, DnErgestL0, dL0, gammaz0, UpErgammaz0, DnErgammaz0, gestz0, UpErgestz0,
DnErgestz0, dz0]));
> datagvsd := array(1 .. 19, 1 .. 14);
> for i to 14 do for j to 19 do datagvsd[j, i] := arraygvsd[i, j] end do end do;
> writedata("gvsd.dat", datagvsd);
#
#
# 2.3.4. Primeiro teste de consistência - densidades por massa:
#
> rho := [seq(rhoth(r0[i]), i = 1 .. 19)];
> rho0 := [seq(simplify(N0[i]*Mg/Vc(r0[i])), i = 1 .. 19)];
> UpErrrho0 := [seq(simplify(sqrt((UpErN[i]*Mg/Vc(r0[i]))^2)), i = 1 .. 19)];
> DnErrrho0 := [seq(simplify(sqrt((DnErN[i]*Mg/Vc(r0[i]))^2)), i = 1 .. 19)];

```